M1 MASS 2004-2005
Université de Nice - Sophia Antipolis

Christophe Giraud, http://math1.unice.fr/∼cgiraud/ens.html
Sylvain Rubenthaler, http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé : Inégalité maximale et Identité de Wald, p. 26-27

Inégalité maximale.
On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $\forall n$.

(a) $\{\tau_a = n\} = \{X_1 < a\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} < a\} \cap \{X_n \geq a\}$ est une intersection d'éléments de $\mathcal{F}_n$ et donc appartient à $\mathcal{F}_n$. Donc τ_a est un temps d'arrêt.

(b) Notation : $a \wedge b = \min(a, b)$. $\mathbb{E}(X_{\tau_a \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0)$ car $(X_{\tau_a \wedge n})_{n \geq 0}$ est une martingale (cf. théorème d'arrêt). $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{\tau_a \wedge n})$ car $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale. On a par ailleurs : $\mathbb{E}(X_{\tau_a \wedge n} \mathbf{1}_{\tau_a > n}) = \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\tau_a > n})$ donc :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{\tau_a} \mathbf{1}_{\tau_a \leq n}) &= \mathbb{E}(X_{\tau_a \wedge n} \mathbf{1}_{\tau_a \leq n}) \\
&= \mathbb{E}(X_{\tau_a \wedge n}(\mathbf{1}_{\tau_a \leq n} + \mathbf{1}_{\tau_a > n})) - \mathbb{E}(X_{\tau_a \wedge n} \mathbf{1}_{\tau_a > n}) \\
&= \mathbb{E}(X_{\tau_a \wedge n}) - \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\tau_a > n}) \\
&= \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\tau_a > n}) \\
&= \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\tau_a \leq n}) \; .
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\max_{k=1,\dots,n} X_k \geq a) &= \mathbb{P}(\tau_a \leq n) \\
&= \mathbb{P}(X_{\tau_a} \mathbf{1}_{\tau_a \leq n} \geq a) \\
\text{(inégalité de Markov)} \quad &\leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(X_{\tau_a} \mathbf{1}_{\tau_a \leq n}) \\
&= \frac{1}{a} \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\tau_a \leq n}) \\
&= \frac{1}{a} \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\max_{k=1,\dots,n} X_k \geq a}) \; .
\end{aligned}
$$

Identité de Wald.
On note $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n) = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Par convention $S_0 = 0$.

(a) T est un temps d'arrêt (même rédaction que pour la question (a), exercice précédent).

(b) Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}(S_n - nm|\mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1} + \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n) - nm = S_{n-1} - (n-1)m$ donc $(S_n - nm)_{n \geq 0}$ est une martingale. Par théorème d'arrêt, $(S_{n \wedge T} - (n \wedge T)m)_{n \geq 0}$ est une martingale donc $\mathbb{E}(S_{n \wedge T} - (n \wedge T)m) = \mathbb{E}(S_0 - 0) = 0$. Donc $m\mathbb{E}(n \wedge T) = \mathbb{E}(S_{n \wedge T}) = \mathbb{E}(S_T \mathbf{1}_{T \leq n}) + \mathbb{E}(S_n \mathbf{1}_{T > n})$.

(c) On suppose toujours que $m > 0$.
Par la loi des grands nombres, $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{\text{p.s.}} m$ donc pour p.t. ω :

$$
X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega) \underset{n \to +\infty}{\sim} nm \; .
$$

Donc pour p.t. ω, $S_n(\omega) \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$ et donc $T(\omega) < +\infty$.

On a donc $T \wedge n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{p.s.}} T$ en croissant donc par convergence monotone : $m\mathbb{E}(T \wedge n) \xrightarrow[n \to \infty]{}$

$\mathbb{E}(T)$.
Encore par convergence monotone : $\mathbb{E}(S_T \mathbf{1}_{T\leq n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(S_T)$.
On a $\mathbb{E}(S_n \mathbf{1}_{T>n}) \leq a\mathbb{P}(T > n) = a\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n < a)$. On sait par la loi des grands nombres que $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \overset{\text{p.s.}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} m$. Cette convergence a donc aussi lieu en probabilité, c'est à dire que pour tout $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \leq m - \epsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier pour $\epsilon = m/2$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq \frac{m}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Pour $n \geq \frac{2a}{m}$: $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n < a) \leq \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq \frac{nm}{2})$. Donc

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n < a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

L'égalité $m\mathbb{E}(n \wedge T) = \mathbb{E}(S_T \mathbf{1}_{T\leq n}) + \mathbb{E}(S_n \mathbf{1}_{T>n})$ nous donne donc quand $n \to +\infty$:

$$m\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(S_T)$$

(d) Si $m = 0$. Comme en (b), on peut montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale. On a $S_T \geq a$ donc $\mathbb{E}(S_T) \neq \mathbb{E}(S_0) = 0$ (le théorème d'arrêt ne s'applique donc pas ici). Si $S_k \geq a$ alors $S_k + \epsilon k \geq a$ donc $T \geq T_\epsilon$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(T) & \geq & \mathbb{E}(T_\epsilon) \\ \text{(question précédente)} & = & \dfrac{1}{\epsilon}\mathbb{E}(S_{T_\epsilon} + \epsilon T_\epsilon) \\ & \geq & \dfrac{a}{\epsilon} \ . \end{array}$$

Cela est vrai $\forall \epsilon > 0$ donc $\mathbb{E}(T) = +\infty$.