M1 MASS 2004-2005
Université de Nice - Sophia Antipolis

Christophe Giraud, http://math1.unice.fr/∼cgiraud/ens.html
Sylvain Rubenthaler, http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé des exercices p. 35

3.5.1 Dans tout l'exercice, on utilise les propriétés de l'espérance conditionnelle (Prop. 1.1, p. 15).

1.
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_N|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= Z_{n-1} \ . \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \mathbb{E}'(W) &= \mathbb{E}(WZ_N) \\ &= \mathbb{E}(W\mathbb{E}(Z_N|\mathcal{F}_p)) \\ &= \mathbb{E}(WZ_p) \ . \end{aligned}$$

3. La variable $\frac{1}{Z_{n-1}}\mathbb{E}(YZ_n|\mathcal{F}_{n-1})$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable. Pour toute variable W $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}'\left(\frac{1}{Z_{n-1}}\mathbb{E}(YZ_n|\mathcal{F}_{n-1})W\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z_{n-1}}\mathbb{E}(YZ_n|\mathcal{F}_{n-1})WZ_N\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z_{n-1}}\mathbb{E}(YZ_n|\mathcal{F}_{n-1})WZ_{n-1}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(YZ_n|\mathcal{F}_{n-1})W\right) \\ &= \mathbb{E}(YZ_nW) \\ &= \mathbb{E}(YW\mathbb{E}(Z_N|\mathcal{F}_n)) \\ &= \mathbb{E}(YWZ_N) \\ &= \mathbb{E}'(YW) \ . \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{Z_{n-1}}\mathbb{E}(YZ_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}'(Y|\mathcal{F}_{n-1})$.

4.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}'(M_n^*|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}'(M_n - \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(\alpha_k \Delta M_k|\mathcal{F}_{k-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \frac{1}{Z_{n-1}}\mathbb{E}(M_n Z_n|\mathcal{F}_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{Z_{k-1}}\Delta M_k|\mathcal{F}_{k-1}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(M_n\frac{Z_n}{Z_{n-1}}|\mathcal{F}_{n-1}\right) - \mathbb{E}\left((M_n - M_{n-1})\frac{Z_n}{Z_{n-1}}|\mathcal{F}_{n-1}\right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{Z_{k-1}}\Delta M_k|\mathcal{F}_{k-1})\right) \\
&= \mathbb{E}\left(M_{n-1}\frac{Z_n}{Z_{n-1}}|\mathcal{F}_{n-1}\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{Z_{k-1}}\Delta M_k|\mathcal{F}_{k-1})\right) \\
&= \frac{M_{n-1}}{Z_{n-1}}\mathbb{E}(Z_n|\mathcal{F}_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{Z_{k-1}}\Delta M_k|\mathcal{F}_{k-1})\right) \\
&= M_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{Z_{k-1}}\Delta M_k|\mathcal{F}_{k-1})\right) \\
&= M_{n-1}^* \ .
\end{aligned}
$$

Donc (M_n^*) est une martingale sous la probabilité $\mathbb{P}'$.

3.5.2 1.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1})) &= \mathbb{E}(\rho_1 + \cdots + \rho_n - nm|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= \rho_1 + \cdots + \rho_{n-1} - nm + \mathbb{E}(\rho_n) \\
&= M_{n-1} \ .
\end{aligned}
$$

2. (G_n) est une $\mathbb{P}$-martingale car (M_n) en est une. Et donc $(\mathcal{E}_n(G))$ en est une aussi.
3. $Z_n = \mathbb{E}(Z_N|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathcal{E}_N(G)|\mathcal{F}_n) = \mathcal{E}_n(G)$. On a : $\alpha_n = \frac{Z_n}{Z_{n-1}} = 1 + \Delta G_n$.
4. Par le lemme de Girsanov, le processus (M_n^*) suivant est une $\mathbb{P}^*$-martingale :

$$
\begin{aligned}
M_n^* &= M_n - \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\frac{Z_k}{Z_{k-1}}\Delta M_k|\mathcal{F}_{k-1}\right) \\
&= V_n - nm - \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left((1+\Delta G_k)\,\Delta M_k|\mathcal{F}_{k-1}\right) \\
&= V_n - nm - \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left(1 + \frac{r-m}{\sigma^2}(\rho_k - m)\right)(\rho_k - m)|\mathcal{F}_{k-1}\right) \\
&= V_n - nm - \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left(1 + \frac{r-m}{\sigma^2}(\rho_k - m)\right)(\rho_k - m)\right) \\
&= V_n - nm - \sum_{k=1}^{n}(r-m) \\
&= V_n - U_n \ .
\end{aligned}
$$

5. Par la Prop. 3.1 p. 30, $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque neutre.