M1 MASS 2004-2005
Université de Nice - Sophia Antipolis

Christophe Giraud, http://math1.unice.fr/∼cgiraud/ens.html
Sylvain Rubenthaler, http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de l'exercice 4.4.1 p. 39

1. On sait que $\mathbb{P}^*$ est une proba risque neutre ssi $(V_n - U_n)$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$. On a $V_n - U_n = \rho_1 + \cdots + \rho_n - nr$ (avec des ρ_k i.i.d.). Donc $\mathbb{P}^*$ est une proba risque neutre ssi $\mathbb{E}^*(\rho_n) = r$, c'est à dire (après un petit calcul) ssi $p^* = \frac{r-a}{b-a}$.

2.
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^*(S_N = S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}) = \\
&\mathbb{P}(\mathrm{Card}\{i \in [1,\dots,N] : \rho_i = b\} = k, \mathrm{Card}\{i \in [1,\dots,N] : \rho_i = a\} = N-k) = \\
&C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}\ .
\end{aligned}$$

   Le prix de l'option est donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*\left(\frac{S_N}{\mathcal{E}_N(U)}\right) &= \frac{1}{(1+r)^N}\mathbb{E}^*(g(S_N)) \\
&= \frac{1}{(1+r)^N}\sum_{k=0}^{N} g(S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k})C_N^k(p^*)^k(1-p^*)^{N-k}\ .
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
X_n^{\pi^*} &= \mathbb{E}^*\left(\frac{\mathcal{E}_n(U)f}{\mathcal{E}_N(U)}|\mathcal{F}_n\right) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\mathbb{E}^*(g(S_N)|\mathcal{F}_n) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\mathbb{E}^*\left(g(S_n(1+\rho_{n+1})\dots(1+\rho_N))|\mathcal{F}_n\right) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\sum_{k=0}^{N-n} g(S_n(1+b)^k(1+a)^{N-n-k})C_{N-n}^{N-n-k}(p*)^k(1-p^*)^{N-n-k} \\
&= \frac{1}{(1+r)^{N-n}}F_{N-n}^*(S_n)\ .
\end{aligned}$$

   L'avant-dernière égalité peut se comprendre de manière intuitive. On peut aussi démontrer rigoureusement que si Z indépendant de $\mathcal{F}_n$ alors

$$\mathbb{E}(g(S_nZ)|\mathcal{F}_n) = \int_{\mathbb{R}} g(S_nz)\mathbb{P}_Z(dz) \tag{1}$$

   (où $\mathbb{P}_Z$ est la loi de Z) car c'est bien ce que nous avons utilisé.
   On remarque que la v.a. $\int_{\mathbb{R}} g(S_nz)\mathbb{P}_Z(dz)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Si on prend Y $\mathcal{F}_n$-mesurable quelconque :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y\int_{\mathbb{R}} g(S_nz)\mathbb{P}_Z(dz)) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(Yg(S_nz))\mathbb{P}_Z(dz) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}(yg(sz))\mathbb{P}_{Y,S_n}(dy,ds)\mathbb{P}_Z(dz) \\
&= \mathbb{E}(Yg(S_nZ))
\end{aligned}$$

car Z indépendant de Y, S_n. Donc on a bien (1).

4. On a :

$$\begin{aligned}
\beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n &= X_n^{\pi^*} \\
(\beta_n^* B_n + \gamma_n^* S_n)\mathbf{1}_{\rho_n=a} &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} F_{N-n}^*(S_n)\mathbf{1}_{\rho_n=a} \\
(\beta_n^* B_0(1+r)^n + \gamma_n^* S_{n-1}(1+a))\mathbf{1}_{\rho_n=a} &= (1+r)^{-(N-n)} F_{N-n}^*(S_{n-1}(1+a))\mathbf{1}_{\rho_n=a} \\
\mathbb{E}^*((\beta_n^* B_0(1+r)^n + \gamma_n^* S_{n-1}(1+a))\mathbf{1}_{\rho_n=a}|\mathcal{F}_{n-1}) &= (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^*(F_{N-n}^*(S_{n-1}(1+a))\mathbf{1}_{\rho_n=a}|\mathcal{F}_{n-1}) \\
(\beta_n^* B_0(1+r)^n + \gamma_n^* S_{n-1}(1+a))(1-p^*) &= (1+r)^{-(N-n)} F_{N-n}^*(S_{n-1}(1+a))(1-p^*) \\
\beta_n^* B_0(1+r)^n + \gamma_n^* S_{n-1}(1+a) &= (1+r)^{-(N-n)} F_{N-n}^*(S_{n-1}(1+a)) \ .
\end{aligned}$$

De même :

$$\beta_n^* B_0(1+r)^n + \gamma_n^* S_{n-1}(1+b) = (1+r)^{-(N-n)} F_{N-n}^*(S_{n-1}(1+b)) \ .$$

5. On résoud le système pour trouver γ_n^* comme demandé par l'énoncé. Puis la relation $\beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_0(1+r)^{n-1}}$ donne l'égalité demandée.

6. On sait que :

$$\begin{aligned}
C &= \mathbb{E}^*\left(\frac{(S_N-K)_+}{\mathcal{E}_N(U)}\right) \\
&= \frac{1}{(1+r)^N}\sum_{k=0}^{N} C_N^k g(S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}) C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \\
&= \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k S_0 \left(\frac{p^*(1+b)}{1+r}\right)^k \left(\frac{(1-p^*)(1+a)}{(1+r)}\right)^{N-k} - \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k K \frac{(p^*)^k(1-p^*)^{N-k}}{(1+r)^N} \\
&= S_0\mathbb{B}(k_0, N, p') - (1+r)^{-N} K \mathbb{B}(k_0, N, p^*) \ .
\end{aligned}$$