

Corrigé de l'exercice 5.6 p. 48

1. On a : $\mathcal{E}_n(U)^{-1}f_n = g(Y_n)M_n \leq g(y^*)M_n$ ($\forall \omega$). Pour tout τ temps d'arrêt $\leq N$, on a par théorème de Doob : $\mathbb{E}(M_\tau) = M_0 = 1$. Et donc : $\mathbb{E}(\mathcal{E}_\tau(U)^{-1}f_\tau) \leq g(y^*)\mathbb{E}(M_\tau) = g(y^*)$.
2. Par théorème : $C = \sup_{\tau \text{ t.a.}, \tau \leq N} \mathbb{E}^*(\mathcal{E}_\tau(U)^{-1}f_\tau)$. Donc $C \leq g^*(y)$.
3. On a $\tau \leq N$ p.s. donc $\mathbb{E}^*(\mathcal{E}_{\tau^*}(U)^{-1}f_{\tau^*}) = \mathbb{E}^*(g(Y_{\tau^*})M_{\tau^*}) = \mathbb{E}^*(g(y^*)M_{\tau^*})$. Et par théorème de Doob : $\mathbb{E}^*(\mathcal{E}_{\tau^*}(U)^{-1}f_{\tau^*}) = g(y^*)$. Donc $C = g(y^*)$.