Examen Processus Stochastiques

Durée 3h
Calculatrices interdites.
Un formulaire de cours (une feuille format A4) est autorisé.

Recommandations: Toutes les questions sont indépendantes sauf I2 - I3, et II1 - II2. J'attends des réponses et justifications précises, concises et soignées (les réponses évasives, mais aussi les pseudo-justifications qui n'ont pas lieu d'être, compterons pour 0). Gardez en tête que vous devez avant tout me convaincre que vous avez bien compris.

Problème

Partie I

Considérons un marché constitué de deux actifs risqués: un actif 1 et un actif 2. On appelle $S_n^{(1)}$ et $S_n^{(2)}$ les valeurs au temps n d'une unité d'actif 1 et d'une unité d'actif 2. On supposera que la dynamique du marché est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta S_n^{(1)} &= \rho_n^{(1)} S_{n-1}^{(1)} \\ \Delta S_n^{(2)} &= \rho_n^{(2)} S_{n-1}^{(2)} \end{aligned}$$

au temps $n \geq 1$, avec $\rho_n^{(1)}, \rho_n^{(2)} > -1$ et la notation $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma\left(S_1^{(1)}, \ldots, S_n^{(1)}, S_1^{(2)}, \ldots, S_n^{(2)}\right)$ l'information dont on dispose au temps n.

1- Montrer que $S_n^{(1)} = \mathcal{E}_n^{(1)} S_0^{(1)}$ et $S_n^{(2)} = \mathcal{E}_n^{(2)} S_0^{(2)}$ avec $\mathcal{E}_0^{(1)} = 1$, $\mathcal{E}_0^{(2)} = 1$, $\mathcal{E}_n^{(1)} = (1+\rho_1^{(1)}) \ldots (1+\rho_n^{(1)})$ et $\mathcal{E}_n^{(2)} = (1+\rho_1^{(2)}) \ldots (1+\rho_n^{(2)})$ pour $n \geq 1$.

2- Considérons un portefeuille π constitué au temps n d'une quantité $\gamma_n^{(1)}$ d'actif 1 et $\gamma_n^{(2)}$ d'actif 2; donc de valeur $X_n^\pi = \gamma_n^{(1)} S_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)} S_n^{(2)}$. On suppose que $\gamma_n^{(1)}$ et $\gamma_n^{(2)}$ sont $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurables. Exprimer (comme dans le cours) la condition d'autofinancement pour le portefeuille π.

3- On supposera dorénavant qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ sous laquelle le processus $\left(S_n^{(2)}/\mathcal{E}_n^{(1)}\right)_{n \leq N}$ est une martingale. Montrer que si π est un portefeuille autofinancé $\left(X_n^\pi/\mathcal{E}_n^{(1)}\right)_{n \leq N}$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$.

4- En déduire que si π est un portefeuille autofinancé avec $X_0^\pi = 0$, alors on ne peut pas avoir simultanément $X_N^\pi \geq 0$ et $\mathbb{P}^*(X_N^\pi > 0) > 0$ (absence d'opportunité d'arbitrage).

Partie II
L'option Margrabe donne le droit à son détenteur d'échanger à l'échéance N une unité d'actif 1 contre une unité d'actif 2.

1- Quelle est la fonction de paiement de l'option Margrabe (justifier rapidement)?

2- Un portefeuille π est dit portefeuille de couverture si sa valeur X_N^π à l'échéance est toujours supérieure ou égale à la fonction de paiement. Montrer que si π est un portefeuille de couverture autofinancé alors

$$X_0^\pi \geq \mathbb{E}^*\left(\frac{1}{\mathcal{E}_N^{(1)}}\left(S_N^{(2)} - S_N^{(1)}\right)_+\right) \quad \text{où } (x)_+ = x \text{ si } x \geq 0 \text{ et } = 0 \text{ sinon.}$$

3- On supposera dorénavant que le marché est complet, c'est-à-dire que pour toute variable aléatoire f, il existe π autofinancé tel que $X_N^\pi = f$. Montrer qu'il existe un portefeuille de couverture autofinancé π^* tel que

$$X_0^{\pi^*} = \mathbb{E}^*\left(\frac{1}{\mathcal{E}_N^{(1)}}\left(S_N^{(2)} - S_N^{(1)}\right)_+\right).$$

4- Quel est le prix C de l'option (justifier)?

5- Etablir (en justifiant bien) l'égalité pour tout $n \leq N$

$$X_n^{\pi^*} = \mathbb{E}^*\left(\frac{\mathcal{E}_n^{(1)}}{\mathcal{E}_N^{(1)}}\left(S_N^{(2)} - S_N^{(1)}\right)_+ \middle| \mathcal{F}_n\right).$$

6- Dans un marché complet, peut-il exister plusieurs probabilités $\mathbb{P}^*$ sous lesquelles le processus $\left(S_n^{(2)}/\mathcal{E}_n^{(1)}\right)_{n \leq N}$ est une martingale?

Exercice

Désignons par B un mouvement Brownien, $T_a := \inf\{t \geq 0 \text{ tel que } B_t = a\}$ son premier temps de passage en a et $\mathcal{F}_t := \sigma(B_r, r \leq t)$ l'information dont on dispose au temps t.

1- On pose $\mathcal{E}_t(\lambda) := \exp(\lambda B_t - \lambda^2 t/2)$. Pour tout $\lambda, t, s \geq 0$, calculer l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}(\mathcal{E}_{t+s}(\lambda)|\mathcal{F}_t).$$

2- En admettant l'égalité $\mathbb{E}(\mathcal{E}_{T_a}(\lambda)) = \mathbb{E}(\mathcal{E}_0(\lambda))$ pour tout $\lambda \geq 0$, calculer pour $x \geq 0$ la quantité $\mathbb{E}(\exp(-xT_a))$.

FIN