Examen Processus Stochastiques

Durée 2h. Tous documents autres que le poly interdits.

Recommandations: Soigner vos justifications. Il faut me convaincre que vous avez compris.

Exercice

Considérons un marché B-S. On suppose qu'il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ et on note $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \ldots, S_n)$.

1- Montrer que si V_n est une $\mathcal{F}_n$-martingale sous $\mathbb{P}^*$ et si (α_n) est prévisible (c'est à dire α_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout n) alors le processus (M_n) défini par

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta V_k$$

est une $\mathcal{F}_n$-martingale sous $\mathbb{P}^*$.

2- Retrouver à partir du Lemme 5.1 et la question précédente, le résultat de la Proposition 3.2: "si π est un portefeuille autofinancé, sa valeur réactualisée $(X_n^\pi/\varepsilon_n(U))$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$".

Problème

Considérons un marché B-S. On suppose qu'il existe une unique probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ et que les taux d'intérêts vérifient $r_n > 0$ pour tout n. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \ldots, S_n)$.

Partie I Option d'achat américaine standard

Considérons une option de type américaine d'échéance N et de fonction de paiement au temps $n \leq N$

$$f_n = (S_n - K)_+ \quad \text{avec } K > 0.$$

On admettra pour la question 2 que si $(X_n)_{n \leq N}$ est une sous-martingale et τ un temps d'arrêt borné par N alors $X_\tau \leq X_N$.

1- Montrer que $\big((S_n - K)/\varepsilon_n(U)\big)_{n \leq N}$ est une sous-martingale sous $\mathbb{P}^*$. En utilisant l'inégalité de Jensen montrer que $\big((S_n - K)_+/\varepsilon_n(U)\big)_{n \leq N}$ est aussi une sous-martingale sous $\mathbb{P}^*$.

2- En déduire que si τ est un temps d'arrêt borné par N alors

$$\mathbb{E}^*\left(\frac{(S_\tau - K)_+}{\varepsilon_\tau(U)}\right) \leq \mathbb{E}^*\left(\frac{(S_N - K)_+}{\varepsilon_N(U)}\right).$$

3- Comparer le prix de l'option considérée à celui d'une option d'achat européenne d'échéance N et de fonction de paiement $f = (S_N - K)_+$ (bien justifier). Quel est le temps d'exercice optimal?

Partie II Option russe

Considérons maintenant une option de type américaine d'échéance N et de fonction de paiement donnée par

$$f_n = \max_{k=0\ldots n} S_k - S_n$$

On pose $Z_n = S_n/\varepsilon_n(U)$ et on définit $\mathbb{P}'$ par

$$\mathbb{P}'(A) := \mathbb{E}^*(Z_N \mathbf{1}_A).$$

On rappelle que l'on a alors $\mathbb{E}'(Y) = \mathbb{E}^*(Z_N Y)$ pour toute variable aléatoire Y.

1- Montrer que si Y est $\mathcal{F}_n$-mesurable alors $\mathbb{E}'(Y) = \mathbb{E}^*(Z_n Y)$.

2- Montrer que le prix de l'option est donné par

$$C = \sup_{\tau \in T_N} \mathbb{E}'(X_\tau) - 1$$

où T_N représente l'ensemble des temps d'arrêt borné par N et

$$X_n = \max_{k=0\ldots n} \frac{S_k}{S_n}\ .$$

FIN