UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2004-2005
Sylvain Rubenthaler

Corrigé de l'examen du 28/01/05

Durée : 3h.

Documents et calculatrices interdits.

La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.

1. (a) $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \geq 1$, $n\left(1-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq n\left(\frac{x^2}{n}\right) = x^2$ qui est intégrable sur $[0,1]$.
   $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \geq 1$, $n\left(1-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) = n\left(\frac{x^2}{n} + o(1/n)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^2$.
   Donc par théorème de convergence dominée : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n\left(1-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

   (b) $\forall x \in [0,+\infty]$, $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2+x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty]$.
   $\forall x \in [0,+\infty]$, $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2+x^2+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2x^2+1}$.
   Donc par théorème de convergence dominée : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2+x^2+1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x^2+1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\frac{1}{\sqrt{2}}dt$(changement de variable $\sqrt{2}x = t$)$= \pi/(2\sqrt{2})$.

   (c) $\forall x \in [0,\pi/4]$, $\forall n \geq 1$, $(1+(\sin(x))^n)^n = \exp(n\log(1+\sin(x)^n)) \leq \exp(n(\sin x)^n) \leq \exp(n(1/\sqrt{2})^n)$. La suite $n(1/\sqrt{2})^n)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ donc elle est bornée par une constante M. Donc $\forall x \in [0,\pi/4]$, $\forall n \geq 1$, $(1+(\sin(x))^n)^n \leq \exp(M)$ qui est intégrable sur $[0,\pi/4]$.
   De plus : $\forall x \in [0,\pi/4]$, $(1+(\sin(x))^n)^n = \exp(n\log(1+\sin(x)^n)) = \exp(n\sin(x)^n + o(n\sin(x)^n))$ (on rappelle que $n\sin(x)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) donc par continuité de exp, $(1+(\sin(x))^n)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$.
   Donc par théorème de convergence dominée : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} (1+(\sin(x))^n)^n dx = \int_0^{\pi/4} 1dx = \pi/4$.

2. (a) Soit $f \in C_b^+(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X,Y)) &= \mathbb{E}(f(U+V^2,V^2)) \\ &= \int_{u\in\mathbb{R},v\in\mathbb{R}_+} f(u+v^2,v^2)\frac{1}{2\pi}2v\exp\left(-\frac{u^2}{2}-\frac{v^4}{2}-uv^2-v^2\right)dudv\ .\end{aligned}$$

   On fait le changement de variable $x = u+v^2$, $y = v^2$ (on remarque que (x,y) parcourt $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ quand (u,v) parcourt $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$). On a $u = x-y$, $v = \sqrt{y}$. On calcule la matrice jacobienne :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{bmatrix}\ .$$

   D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X,Y)) &= \int_{x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}_+} f(x,y)\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2}-\frac{y^2}{2}-(x-y)y-y\right)dxdy \\ &= \int_{x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}} f(x,y)\frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{y\geq 0}\exp\left(-\frac{x^2}{2}-y\right)dxdy\ .\end{aligned}$$

   Donc la densité de (X,Y) est $(x,y) \mapsto \frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2}\mathbf{1}_{y\geq 0}e^{-y}$.

(b) C'est le produit d'une fonction de x et d'une fonction de y donc X et Y sont indépendantes.

3. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X-Y|\leq 1/4) &= \int_{x\in[0,1],y\in[0,1]} \mathbf{1}_{|x-y|\leq 1/4} dxdy \\
\text{(Fubini-Tonelli)} &= \int_{x\in[0,1]}\int_{y\in[0,1]} \mathbf{1}_{|x-y|\leq 1/4} dxdy \\
&= \int_{x\in[0,1]} \left(\int_{(x-1/4)\vee 0}^{(x+1/4)\wedge 1} 1dy \right) dx \\
&= \int_{x\in[0,1]} (((x+1/4)\wedge 1) - ((x-1/4)\vee 0))\, dx \\
&= \int_0^{1/4} x+\frac{1}{4}dx + \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{2}dx + \int_{3/4}^{1} \frac{5}{4} - xdx \\
&= \frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}-1\right)^2 \\
&= \frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{3}{32} \\
&= \frac{7}{16}\ .
\end{aligned}$$

(b) i. $\mathbb{P}(U\leq t)=1$

ii. $\mathbb{P}(U\leq t)=0$

iii.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sup(X,Y)\leq t, |X-Y|\leq 1/4) &= \mathbb{P}(X\leq t, Y\leq t, |X-Y|\leq 1/4) \\
&= \mathbb{P}(X\leq t, Y\leq t) \\
\text{(indépendance)} &= \mathbb{P}(X\leq t)\mathbb{P}(Y\leq t) \\
&= t^2\ .
\end{aligned}$$

On a : $\mathbb{P}(X\vee Y\leq t, |X-Y|\leq 1/4) = t^2 \neq \frac{7}{16}t^2 = \mathbb{P}(X\vee Y\leq t)\mathbb{P}(|X-Y|\leq 1/4)$ donc les événements $\{\sup(X,Y)\leq t\}$ et $\{|X-Y|\leq 1/4\}$ ne sont pas indépendants.

iv. Pour $t\in[0,1/4]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U\leq t) &= \mathbb{P}(U=0)+\mathbb{P}(\sup(X,Y)\leq t, |X-Y|\leq 1/4) \\
&= \frac{9}{16}+t^2\ .
\end{aligned}$$

v. ...

(c) Si $T\in[0,1/4]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X-T|\leq 1/4) &= \int_0^1 \mathbf{1}_{|x-T|\leq 1/4} dx \\
&= \int_0^{T+1/4} 1dx = T+\frac{1}{4}\ .
\end{aligned}$$

De même, si $T\in[3/4,1]$: $\mathbb{P}(|X-T|\leq 1/4) = \frac{5}{4}-T$. Si $T\in[1/4,3/4]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X-T|\leq 1/4) &= \int_0^1 \mathbf{1}_{|x-T|\leq 1/4} dx \\
&= \int_{T-1/4}^{T+1/4} 1dx = \frac{1}{2}\ .
\end{aligned}$$

Donc Pécuchet doit arriver entre 10h15 et 10h45 pour maximiser ses chances de voir Bouvard.

4. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1^2+Y_1^2\leq 1) &= \frac{1}{4}\int_{x\in[-1,1],y\in[-1,1]}\mathbf{1}_{x^2+y^2\leq 1}dxdy\\
\text{(F-T)} &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}1dy\right)dx\\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}dx\\
\text{(changement de variable } x=\sin u\text{)} &= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2\cos^2(u)du\\
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(2u)+1du\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(2u)}{2}+u\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\\
&= \frac{\pi}{4}\ .
\end{aligned}$$

5. Les variables U_k sont intégrables car bornées donc par la loi des grands nombres :

$$\frac{U_1+\cdots+U_n}{n}\underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}}\mathbb{E}(U_1)=\mathbb{P}(X_1^2+Y_1^2\leq 1)\times 1+0=\frac{\pi}{4}\ .$$