UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2004-2005
Sylvain Rubenthaler

Examen - 28/01/05
Durée : 3h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.

1. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n\left(1-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)dx$ (Rappel : $\forall u\in[0,\pi/2]$, $\cos(u)\geq 1-u^2/2$.)
   (b) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2+x^2+1}dx$.
   (c) $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/4}(1+(\sin(x))^n)^n\,dx$ (Indication : on pourra commencer par calculer $\lim_{n\to+\infty} nu^n$ pour $u\in[0,1[$.)

2. Soit (U,V) v.a. dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ de densité $(u,v)\mapsto\frac{1}{2\pi}2v\exp\left(-\frac{u^2}{2}-\frac{v^4}{2}-uv^2-v^2\right)$. Soient $X=U+V^2, Y=V^2$. (On remarque que Y est une variable positive.)
   (a) Calculer la densité de (X,Y).
   (b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Bouvard et Pécuchet vont chacun boire un café au Café du Port entre 10h et 11h. Soit X une v.a.r. correspondant à l'instant d'arrivée de Bouvard et Y une v.a.r. correspondant à celui de Pécuchet. Précisément : X et Y sont indépendantes, uniformes dans $[0,1]$. Bouvard arrive à 10h+$X\times$1h, Pécuchet arrive à 10h+$Y\times$1h. Chacun d'entre eux reste 1/4h dans le café.
   (a) Calculer la probabilité que Bouvard et Pécuchet se croisent dans le café (c'est à dire que $|X-Y|\leq 1/4$). (Si vous ne faites pas cette question, vous pouvez continuer les calculs avec une quantité inconnue $p=\mathbb{P}(|X-Y|\leq 1/4)$. On indique que $p\in]0,1[$.)
   (b) Soit U la v.a.r. qui vaut 0 si $|X-Y|>1/4$ et qui vaut $\sup(X,Y)$ sinon. On a donc $U=\sup(X,Y)\times\mathbf{1}_{|X-Y|\leq 1/4}$.
      i. Soit $t>1$, calculer $\mathbb{P}(U\leq t)$.
      ii. Soit $t<0$, calculer $\mathbb{P}(U\leq t)$.
      iii. Soit $t\in[0,1/4]$. Calculer $\mathbb{P}(\sup(X,Y)\leq t, |X-Y|\leq 1/4)$. Les événements $\{\sup(X,Y)\leq t\}$ et $\{|X-Y|\leq 1/4\}$ sont-ils indépendants ?
      iv. Soit $t\in[0,1]$, on cherche à calculer $\mathbb{P}(U\leq t)$. On admet que pour $t\in[1/4,1]$,
      $$\mathbb{P}(U\leq t)=\frac{9}{16}+\left(\frac{\mathbb{P}(|X-Y|\leq 1/4)-\frac{1}{16}}{\frac{3}{4}}\right)\left(t-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}\ .$$
      (Remarque : cette formule ne sert que dans la question suivante.) Calculer $\mathbb{P}(U\leq t)$ pour $t\in[0,1/4]$.
      v. Dessiner la fonction de répartition de U.
   (c) On suppose dans cette question que Bouvard ne change rien à ses habitudes et que Pécuchet arrive à un instant fixe : 10h+$T\times$1h. Calculer $\mathbb{P}(|T-X|\leq 1/4)$. (On pourra différencier les cas $T\in[0,1/4]$, $T\in[1/4,3/4]$, $T\in[3/4,1]$.) Comment choisir T pour maximiser $\mathbb{P}(|T-X|\leq 1/4)$?

4. Le professeur Cosinus jette des graviers sur un carré de côté 2. On suppose que la position du k-ème gravier est donnée par (X_k, Y_k) où les couples $(X_k, Y_k)_{k\geq 0}$ sont i.i.d. et pour tout k : X_k, Y_k sont des v.a.r. indépendantes, uniformes sur $[-1,1]$. Pour tout k, on pose $U_k = \mathbf{1}_{X_k^2+Y_k^2\leq 1}$.

   (a) Calculer la probabilité que $X_1^2 + Y_1^2 \leq 1$.

   (b) Que peut-on dire de $\frac{U_1+\cdots+U_n}{n}$ quand $n \to +\infty$?

■ Barême approximatif : 1. (5 pts.), 2. (3 pts.), 3. (11 pts.), 4. (3 pts.).