UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
M1 MASS - Processus stochastiques - 2004-2005
Sylvain Rubenthaler

Corrigé de l'examen du 4/05/05
Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*\left(\frac{X_n^\Pi}{\mathcal{E}_n(U)}|\mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbb{E}^*\left(\frac{\beta_n B_0\mathcal{E}_n(U)+\gamma_n S_n+\mu_n V_n}{\mathcal{E}_n(U)}|\mathcal{F}_{n-1}\right)\\
&= \beta_n B_0+\gamma_n\mathbb{E}^*\left(\frac{S_n}{\mathcal{E}_n(U)}|\mathcal{F}_{n-1}\right)+\mu_n\mathbb{E}^*\left(\frac{V_n}{\mathcal{E}_n(U)}|\mathcal{F}_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

car $B_0,\gamma_n,\beta_n,\mu_n$ sont $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurables. Comme $\left(\frac{S_n}{\mathcal{E}_n(U)}\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\frac{V_n}{\mathcal{E}_n(U)}\right)_{n\geq 0}$ sont des martingales sous $\mathbb{P}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*\left(\frac{X_n^\Pi}{\mathcal{E}_n(U)}|\mathcal{F}_{n-1}\right) &= B_0+\frac{\gamma_n}{B_0}\frac{S_{n-1}}{\mathcal{E}_{n-1}(U)}+\frac{\mu_n}{B_0}\frac{V_{n-1}}{\mathcal{E}_{n-1}(U)}\\
&= \frac{\beta_n B_{n-1}+\gamma_n S_{n-1}+\mu_n V_{n-1}}{B_0\mathcal{E}_{n-1}(U)}\\
\text{(autofinancement)} \quad &= \frac{\beta_{n-1}B_{n-1}+\gamma_{n-1}S_{n-1}+\mu_{n-1}V_{n-1}}{B_0\mathcal{E}_{n-1}(U)}\\
&= \frac{X_{n-1}^\Pi}{\mathcal{E}_{n-1}(U)}\ .
\end{aligned}$$

(b) $\mathbb{E}^*\left(\frac{X_N^\Pi}{\mathcal{E}_N(U)}\right)=\frac{X_0^\Pi}{\mathcal{E}_0(U)}=0$ et $\frac{X_N^\Pi}{\mathcal{E}_N(U)}\geq 0$ donc $\mathbb{P}^*(\{\omega:\frac{X_N^\Pi(\omega)}{\mathcal{E}_N(U)(\omega)}\neq 0\})=0$. $\mathbb{P}^*$ est équivalente à $\mathbb{P}$ donc $\mathbb{P}(\{\omega:\frac{X_N^\Pi(\omega)}{\mathcal{E}_N(U)(\omega)}\neq 0\})=0$. Donc $X_N^\Pi(\omega)=0$ presque sûrement.

(c) À l'échéance, le détenteur de l'option achète parmi S et V celui qui est au cours le plus haut (si celui-ci $\geq K$) et revend immédiatement, il fait le bénéfice $f=(S_N\vee V_N-K)_+$.

(d) Pour tout portefeuille Π autofinancé tel que $X_N^\Pi\geq f$, on a (par question (a)) : $X_0^\Pi=\mathbb{E}^*\left(\frac{X_N^\Pi}{\mathcal{E}_N(U)}\right)\geq\mathbb{E}^*\left(\frac{f}{\mathcal{E}_N(U)}\right)$. Donc $C\geq\mathbb{E}^*\left(\frac{f}{\mathcal{E}_N(U)}\right)$.

Exercice 2

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(\frac{(1+X_1)\dots(1+X_n)}{m^n}|\mathcal{F}_{n-1}\right)\\
&= \frac{(1+X_1)\dots(1+X_{n-1})}{m^n}\mathbb{E}(1+X_n)\\
&= M_{n-1}
\end{aligned}$$

car $X_1,\dots,X_{n-1}$ sont $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurables et X_n est indépendant de $X_1,\dots,X_{n-1}$.

(b) D'après le cours T est un temps d'arrêt et encore d'après le cours, $(M_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale.

(c) $\forall n$, $\log(1+S_n) - \log(1+S_{n-1}) = \log(1+X_n) = a$ ou $-a$. Donc si $T \leq n$, $S_{n\wedge T} = \exp(10 \times a)$. De plus $m > 1$ donc $|M_{n\wedge T}| \leq \exp(10 \times a)$.

(d) On a $\log(S_n) = \log(1+X_1)+\cdots+\log(1+X_n)$. Les variables $\log(1+X_1), \ldots, \log(1+X_n)$ sont i.i.d. et L^1 (car bornées) donc par la loi des grands nombres, pour presque tout ω, $\frac{\log(S_n(\omega))}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(\log(1+X_1)) = a/2$. Donc pour presque tout ω, il existe n tel que $S_n \geq \exp(10 \times a)$ et donc $T < \infty$. Donc $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

(e) Par théorème de Doob, on a alors $\mathbb{E}(S_T/m^T) = \mathbb{E}(S_0) = 1$. Donc $\mathbb{E}(1/m^T) = \exp(10 \times a)$.