UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
M1 MASS - Processus stochastiques - 2004-2005
Sylvain Rubenthaler

Examen - 4/05/05
Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.

Exercice 1
On s'intéresse au modèle de marché suivant. On a un actif non risqué de valeur B_n au temps n et deux actifs risqués de valeurs S_n et V_n au temps n. On suppose que $B_n = B_0(1+r_1)\dots(1+r_n)$, $S_n = S_0(1+\rho_1)\dots(1+\rho_n)$, $V_n = V_0(1+\delta_1)\dots(1+\delta_n)$. On note $U_n = r_1 + \dots + r_n$. On rappelle la notation $\mathcal{E}_n(U) = (1+r_1)\dots(1+r_n)$ pour $n \geq 1$ et $\mathcal{E}_0(U) = 1$. On se place dans la filtration suivante : $(\mathcal{F}_n = \sigma(B_0, \dots, B_n, S_0, \dots, S_n, V_0, \dots, V_n))_{n\geq 0}$.

On considère des portefeuilles de la forme suivante. Un portefeuille est constitué au temps n d'une quantité β_n d'actif B, γ_n d'actif S et μ_n d'actif V. On note $\Pi_n = (\beta_n, \gamma_n, \mu_n)$ et la valeur du portefeuille au temps n est $X_n^\Pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n + \mu_n V_n$. On supposera toujours que le portefeuille est autofinancé, ce qui se traduit par la relation : $\forall n \geq 1$, $\beta_{n-1}B_{n-1} + \gamma_{n-1}S_{n-1} + \mu_{n-1}V_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} + \mu_n V_{n-1}$. On décide à l'instant $n-1$ des quantités β_n, γ_n, μ_n.

On se fixe une échéance $N > 0$. On suppose qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ ḉquivalente à $\mathbb{P}$ telle que $\left(\frac{S_n}{\mathcal{E}_n(U)}\right)_{0\leq n\leq N}$ et $\left(\frac{V_n}{\mathcal{E}_n(U)}\right)_{0\leq n\leq N}$ sont des martingales sous $\mathbb{P}^*$. On se fixe $N > 0$.

Même si certaines questions de cet exercice semblent proches du cours, vous êtes priés de rédiger des démonstrations complètes.

(a) Montrer que $\left(\frac{X_n^\Pi}{\mathcal{E}_n(U)}\right)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale sous $\mathbb{P}^*$.

(b) On dit qu'il y a opportunité d'arbitrage s'il existe un portefeuille ayant les propriétés suivantes :

$$X_0^\Pi = 0, X_n^\Pi \geq 0 \ \forall n \leq N \text{ et } \mathbb{P}(X_N^\Pi > 0) > 0 \ .$$

On veut montrer qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage. On prend Π un portefeuille vérifiant $X_0^\Pi = 0$. Déduire de la question précédente que $X_N^\Pi = 0$ presque sûrement. (Ceci montre qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.)

(c) On s'intéresse à une option qui permet à son détenteur d'acheter de l'actif S ou de l'actif V à l'échéance N à un prix $K > 0$ fixé. Quelle est la fonction de paiement d'un telle option ?

(d) On note f la fonction de paiement trouvée à la question précédente. Le prix de l'option au temps 0 est par définition :

$$C = \inf\{X_0^\Pi : \Pi \text{ portefeuille autofinancé tel que } X_N^\Pi(\omega) \geq f(\omega), \forall\omega\} \ .$$

Montrer que $C \geq \mathbb{E}^*\left(\frac{f}{\mathcal{E}_N(U)}\right)$.

Exercice 2 (légèrement plus dur que l'exercice 1)
Soit $a = 13$. Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que

$$X_n \begin{cases} = e^a - 1 & \text{avec probabilité } \frac{3}{4} \\ = e^{-a} - 1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Soit $S_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $S_n = (1+X_1)\ldots(1+X_n)$. On se place dans la filtration suivante : $(\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \ldots, S_n))_{n\geq 0}$. On remarque que $\forall n$, $\sigma(S_1, \ldots, S_n) = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On note $m = \frac{3}{4}e^a + \frac{1}{4}e^{-a}$, on admet que $m > 1$.

(a) On note pour tout n : $M_n = \frac{S_n}{m^n}$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

(b) Soit $T = \inf\{n > 0 : S_n \geq \exp(10 \times a)\}$. Montrer que $(M_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale.

(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout ω, $\log(S_n(\omega)) - \log(S_{n-1}(\omega)) \in \{a, -a\}$. Donner une constante $K > 0$ telle que $|M_{n\wedge T}| \leq K$ (pour tout n et pour tout ω).

(d) Montrer que pour presque tout ω, $\frac{\log(S_n(\omega))}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{2}$. En déduire que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

(e) Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{S_T}{m^T}\right) = 1$. Donner $\mathbb{E}(1/m^T)$ en fonction de a.