UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Master 2 MASS - Probabilités numériques - 2004-2005 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé du 2.e. de la feuille d'exercices numéro 1

Soit Y de loi $\mathcal{L}(X|X>m)$. Y a pour densité $f(x) = C\mathbf{1}_{x>m}e^{-x^2/2}$ avec $C = \left(\int_m^{+\infty} e^{-x^2/2}\right)^{-1}$. Soit $g(x) = \theta e^{-\theta(x-m)}\mathbf{1}_{x>m}$. Soit $k = \sup_{x>m} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Méthode de simulation par rejet : On tire X de loi de densité g et U uniforme sur $[0,1]$ jusqu'à ce que

$$U \leq \frac{f(X)}{kg(X)} = \frac{C}{k}\frac{e^{-X^2/2}}{g(X)}$$

et alors le résultat Z a même loi que Y. Pour que cette méthode soit implémentable, il faut que k/C soit explicite. On a :

$$\begin{aligned} \frac{k}{C} &= \frac{1}{C}\sup_{x>m}\frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \sup_{x>m}\frac{e^{-x^2/2}}{g(x)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\theta}\exp(-\theta^2/2+\theta(\theta-m)) & \text{si } \theta \geq m \\ \frac{1}{\theta}\exp(-m^2/2) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

donc k/C est explicite.

On cherche ensuite le θ optimal, c'est à dire qui réduise le nombre d'opérations nécessaires à la simulation de X. À chaque tirage de (X,U), la probabilité d'acceptation est (cf. cours)

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{C\sup_{x>m}\frac{e^{-x^2/2}}{\theta e^{-\theta(x-m)}}} =: \frac{1}{Cs(\theta)} .$$

On cherche donc θ qui minimise $s(\theta)$ et on trouve $\theta_0 = \frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}$.