UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Master 2 MASS - Probabilités numériques - 2004-2005 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de l'exercice 2 de la feuillle 2

On a trouvé la transition : $P(x,y)=\frac{p(y)}{c}$ si $X\neq y$ et $P(x,x)=1-\sum_{y:y\neq x}\frac{p(y)}{c}$. Pour une probabilité μ, on calcule :

$$\begin{aligned}\mu P(y) &= \sum_{x:x\neq y}\mu(x)\frac{p(y)}{c}+\left(1-\sum_{x:x\neq y}\frac{p(x)}{c}\right)\mu(y)\\ &= \frac{p(y)}{c}(1-\mu(y))+\left(1-\frac{(1-p(y))}{c}\right)\mu(y)\\ &= \frac{p(y)}{c}+\left(1-\frac{1}{c}\right)\mu(y)\ .\end{aligned}$$

On remarque que $pP=p$. On forme la différence :

$$\mu P(y)-pP(y) = \left(1-\frac{1}{c}\right)(\mu(y)-p(y))\ .$$

Si on note $\|\mu-\nu\|_{\mathrm{VT}}=\sum_y|\mu(y)-\nu(y)|$ (norme variation totale, à un facteur près), on a :

$$\|\mu P-pP\|_{\mathrm{VT}}\leq\left(1-\frac{1}{c}\right)\|\mu-p\|_{\mathrm{VT}}\ .$$

La loi de X_n est qP^n et donc par récurrence :

$$\begin{aligned}\|qP^n-p\|_{\mathrm{VT}} &= \|qP^n-pP^n\|_{\mathrm{VT}}\\ &\leq \left(1-\frac{1}{c}\right)^n\|q-p\|_{\mathrm{VT}}\\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .\end{aligned}$$

Pour toute fonction f mesurable bornée : $|(qP^n)(f)-p(f)|\leq\|f\|_\infty\|qP^n-p\|_{\mathrm{VT}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Donc la loi de X_n converge vers p.