UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2004-2005
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé du partiel du 17/11/04
Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.

1. Question de cours.
2. (a)
   - C'est vrai pour $n = 1$.
   - Si c'est vrai en n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_n \\ \text{(par hypothèse de récurrence)} &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right) \end{aligned}$$

   alors c'est vrai en $n + 1$.
   Conclusion : la formule est valable $\forall n$.

   (b) Formule de la somme partielle d'une série géométrique :

$$u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad .$$

   (c) $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1} = B_{n+1}$.

   (d) Réunion croissante : $\lambda(\bigcup_{n\geq 1} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(B_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$.

3. (a) $\mu(]-\infty, b]) = e^b$ et $\mu(]-\infty, a]) = e^a$ car $a, b \geq 0$. $]-\infty, a] \subset]-\infty, b]$ donc (propriété des mesures) $\mu(]a, b]) = \mu(]-\infty, b] \diagdown]-\infty, a]) = \mu(]-\infty, b]) - \mu(]-\infty, a]) = e^b - e^a$.

   (b) $\mu(]-\infty, a]) = 0$ car $a < 0$ et comme à la question précédente : $\mu(]a, b]) = \mu(]-\infty, b]) - \mu(]-\infty, a]) = e^b$.

   (c) On applique la question précédente : $\mu(]-1/n, 1/n]) = e^{1/n}$.

   (d) $\bigcap_{n>0}]-1/n, 1/n] = \{0\}$.

   (e) Intersection décroissante : $\mu(\{0\}) = \mu(\bigcap_{n>0}]-1/n, 1/n]) = \lim_{n\to+\infty} \mu(]-1/n, 1/n]) = 1$.

4. (a)
   - $\forall x \geq 0, \forall n \geq 0$, $e^{-nx + \frac{1}{(1+x^2)^n}} \leq e^{-x+1}$ intégrable sur $[0, +\infty[$
   - $\forall x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} -nx = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} -nx + \frac{1}{(1+x^2)^n} = -\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} e^{-nx+\frac{1}{(1+x^2)^n}} = 0$
     donc $e^{-nx+\frac{1}{(1+x^2)^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour p.t. $x \geq 0$

   donc par théorème de convergence dominée : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx+\frac{1}{(1+x^2)^n}} dx = \int_0^{+\infty} 0 dx = 0$.

   (b)
   - $\forall x \in [1, 2], \forall n \geq 0$, $\left|\sin\left(\frac{x^2}{n}\right) \frac{n}{x}\right| \leq \frac{x^2}{n}\frac{n}{x} = x$ qui est intégrable sur $[1, 2]$

- $\forall x \in [1,2]$, $\sin\left(\frac{x^2}{n}\right)\frac{n}{x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{n}\frac{n}{x} = x$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{x^2}{n}\right)\frac{n}{x} = x$

donc par théorème de convergence dominée : $\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \sin\left(\frac{x^2}{n}\right)\frac{n}{x}dx = \int_1^2 xdx = \frac{3}{2}$.

(c)
- $\forall x \geq 1, \forall n \geq 0$, $\left|\frac{n\log(1+x/n)}{x^3-1/(n+2)}\right| \leq \frac{x}{x^3-(1/2)}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$
- $\forall x \geq 1$, $\frac{n\log(1+x/n)}{x^3-1/(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x^3-1/(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x^2}$

donc par théorème de convergence dominée : $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n\log(1+x/n)}{x^3-1/(n+2)}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1$.

(d)
- $\forall x \geq 1, \forall n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left|x\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^n\right| &= x\exp\left(n\log\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)\right) \\ &\leq \exp\left(-n\frac{x^2}{2n}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

qui est intégrable sur $[1,+\infty[$
- $\forall x \geq 1$, $n\log\left(1-\frac{x^2}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ donc par continuité de exp, $\lim_{n\to+\infty} x\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^n = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

donc par théorème de convergence dominée : $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} x\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^n dx = \int_1^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_1^{+\infty} = e^{-\frac{1}{2}}$.