UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2004-2005
Sylvain Rubenthaler

Partiel - 17/11/04
Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.

1. Question de cours
   Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Donner la définition d'une mesure sur $(E, \mathcal{E})$.

2. On construit des ensembles :

$$\begin{aligned} A_1 &= [1/3, 2/3] \\ A_2 &= [1/9, 2/9] \cup [3/9, 4/9] \cup [5/9, 6/9] \cup [7/9, 8/9] \\ \dots\ A_n &= \bigcup_{0 \leq i \leq (3^n-3)/2} [(2i+1)/3^n, (2i+2)/3^n]\ \dots\ . \end{aligned}$$

   On pose pour tout $n \geq 0$, $B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$. On note λ la mesure de Lebesgue. On pose $u_n = \lambda(B_n)$. On admet que $u_1 = 1/3$ et que :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} u_n\ .$$

   (a) Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\ .$$

   (b) En déduire la valeur exacte de u_n (en calculant la somme ci-dessus).
   (c) Montrer que $\forall n \geq 1$, $B_n \subset B_{n+1}$.
   (d) Calculer $\lambda(\bigcup_{n\geq 1} B_n)$.

3. Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}$ de fonction de répartition $F(t) = \mu(]-\infty, t]) = e^t \mathbf{1}_{t \geq 0}$. (Attention : la fonction de répartition n'est pas la densité.)
   (a) Soient $b \geq a \geq 0$. Calculer $\mu(]-\infty, b]), \mu(]-\infty, a])$. En déduire $\mu(]a, b])$.
   (b) Soient $a < 0$, $b \geq 0$. Calculer $\mu(]-\infty, b]), \mu(]-\infty, a])$. En déduire $\mu(]a, b])$.
   (c) Soit $n > 0$. Calculer $\mu(]-1/n, 1/n])$.
   (d) Quel est l'ensemble $\bigcap_{n>0}]-1/n, 1/n]$?
   (e) Calculer $\mu(\{0\})$.

4. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx + \frac{1}{(1+x^2)^n}} dx$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) \frac{n}{x} dx$
   (c) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n \log(1+x/n)}{x^3 - 1/(n+2)} dx$
   (d) $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} x \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)^n dx$.