Maitrise MASS 4 avril 2003

Partiel Processus Stochastiques

Problème I:
Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes et de même loi), vérifiant $\mathbb{P}(X_i = +1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = q$, avec $p = 1 - q > q$. Pour deux entiers $1 \leq a < b$ on note

$$S_n := a + X_1 + \ldots + X_n, \quad \text{et} \quad T := \inf\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } S_n = 0 \text{ ou } b\}.$$

L'information dont on dispose au temps n est $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que $M_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ est une martingale.
2. Montrer que $|M_{n \wedge T}| \leq 1$ (on rappelle que $p > q$). En déduire que $(M_{n \wedge T})$ est uniformément intégrable.
3. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(S_T = 0)$ à l'aide du théorème d'arrêt (il faudra remarquer que $\mathbb{P}(S_T = b) = 1 - \mathbb{P}(S_T = 0)$). En déduire la valeur de $\mathbb{E}(S_T)$.
4. Montrer que $N_n := S_n - n(p - q)$ est une martingale. En admettant que l'on a le droit d'écrire $\mathbb{E}(N_T) = \mathbb{E}(N_0)$, déterminer $\mathbb{E}(T)$.

Problème II:
Considérons une généalogie de Galton-Watson. On note Z_n le nombre d'individus présents à la génération n. On suppose qu'au temps initial il y a un seul ancêtre, i.e. $Z_0 = 1$. On appelle $X_k^{(n)}$ le nombre d'enfants de l'individu numéro k présent à la n-ième génération. On rappelle la relation entre Z_{n+1} et Z_n:

$$Z_{n+1} = X_1^{(n)} + \cdots + X_{Z_n}^{(n)}.$$

On fait l'hypothèse que les variables aléatoires $X_k^{(n)}$ pour $k, n \in \mathbb{N}$ sont indépendantes entres elles et suivent toute la même loi binomiale μ, c'est-à-dire que $\forall\, k, n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\left(X_k^{(n)} = i\right) = \mu(i) = pq^i, \text{ avec } q = 1 - p.$$

On supposera que $\underline{q < p}$ et on posera $m := \mathbb{E}(X_k^{(n)}) = q/p$.

1. Pour $s \in [0, 1]$, calculer $G(s) := \mathbb{E}\left(s^{X_k^{(n)}}\right)$ en fonction de s, p et q (on rappelle l'identité $\frac{1}{1-a} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i$ pour $|a| < 1$).
2. On rappelle la formule vue en cours: la probabilité π d'extinction de l'espèce vérifie l'équation $\pi = G(\pi)$. Calculer π (on remarquera que $1 - 4pq = (2p - 1)^2$).
3. On pose $M_n := \frac{Z_n}{m^n}$. Montrer que (M_n) est une martingale.
4. Admettons l'égalité

$$\mathbb{E}\left(s^{Z_n}\right) = \frac{pm^n(1-s) + qs - p}{qm^n(1-s) + qs - p}, \text{ pour } s \in [0, 1]. \tag{1}$$

   Exprimer pour $\lambda \geq 0$, $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda M_n}\right)$ en fonction de λ, p, q et m. Quelle est la limite de cette quantité lorsque $n \to \infty$?