Partiel Processus Stochastiques

Durée 2h

Á l'exception du poly, tous documents interdits.

Recommandation: Soignez les justifications et la présentation. N'oubliez pas que vous devez avant tout me convaincre.

Exercice 1 (3 points)

Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note $m = \mathbb{E}(X_n) < \infty$, ainsi que $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ et

$$Y_n := \sum_{i=1}^{n} iX_i - \frac{n(n+1)}{2}\, m\,.$$

Calculer $\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1})$. Que peut-on dire du processus $(Y_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 2 (10 points)

Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

1- On fixe $\lambda > 0$. Montrer que $M_n := e^{\lambda S_n}/(\cosh \lambda)^n$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale (rappel: $\cosh \lambda = \frac{1}{2}(e^{\lambda} + e^{-\lambda})$).

2- Montrer que $\cosh x \geq 1$ pour tout $x \geq 0$.

3- Soit $\tau = \inf\{n > 0 :\ S_n \geq 10\}$. Montrer que $M_{n\wedge\tau}$ est une martingale et donner une constante $K > 0$ telle que $|M_{n\wedge\tau}| \leq K$.

4- Etablir (en justifiant soigneusement) l'égalité $\mathbb{E}\left((\cosh\lambda)^{-\tau}\right) = e^{-10\lambda}$. On pourra admettre que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

Exercice 3 (7 points)

Considérons une sous-martingale $(X_n)_{n\geq 0}$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $Z_0 = 0$,

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \big(\mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}\big) \quad \text{et} \quad Y_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(X_k - \mathbb{E}(X_k|\mathcal{F}_{k-1})\big).$$

1- Montrer que Y_n est une martingale.

2- Montrer que $Z_{n+1} \geq Z_n$ quel que soit $n \geq 0$. la variable aléatoire Z_n est-elle $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable? $\mathcal{F}_n$-mesurable?

3- Montrer que <u>si</u> $X_n = Y'_n + Z'_n$ où Y'_n est une martingale et Z'_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable et vérifie $Z'_0 = 0$, $Z'_{n+1} \geq Z'_n$ quel que soit $n \geq 0$, <u>alors</u> $Y_n = Y'_n$ et $Z_n = Z'_n$ (on pourra commencer par montrer que $\Delta Z_n = \Delta Z'_n$).