UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
M1 MASS - Processus stochastiques - 2004-2005
Sylvain Rubenthaler

Corrigé du partiel A - 30/03/05

1. (a) $\mathbb{P}(S=k|U=0)=\frac{\mathbb{P}(S=k,U=0)}{\mathbb{P}(U=0)}=\frac{\mathbb{P}(X_1=k,U=0)}{\mathbb{P}(U=0)}=\mathbb{P}(X_1=k)$ (par indépendance).
   (b) $\mathbb{P}(S=k|U=1)=\frac{\mathbb{P}(S=k,U=1)}{\mathbb{P}(U=1)}=\frac{\mathbb{P}(X_1+X_2=k,U=0)}{\mathbb{P}(U=0)}=\mathbb{P}(X_1+X_2=k)$ (par indépendance).
   (c) $\mathbb{E}(S|U=0)=\sum_{k\geq 1}k\mathbb{P}(S=k|U=0)=\sum_{k\geq 1}k\mathbb{P}(X_1=k)=\mathbb{E}(X_1)=7/2$
   $E(S|U=1)\sum_{k\geq 1}k\mathbb{P}(S=k|U=1)\sum_{k\geq 1}k\mathbb{P}(X_1+X_2=k)=\mathbb{E}(X_1+X_2)=7.$
   (d) $\mathbb{E}(S|U)$ est une fonction de U donc $E(S|U)=(7/2)(1+U)$.
   (e) $\mathbb{E}(S)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(S|U))=\mathbb{E}((7/2)(1+U))=(7/2)(1+p)$.
2. (a) Soit $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_1+\dots+X_{n+1}-n(n+1)2p-1)|\mathcal{F}_n)\\ &= X_1+\dots+X_n+\mathbb{E}(X_{n+1})-(n+1)(2p-1)=M_n\ .\end{aligned}$$

   (b) Par théorème d'arrêt, $(M_{n\wedge T})$ est une martingale donc $\mathbb{E}(M_{n\wedge T})=\mathbb{E}(M_1)=\mathbb{E}(X_1-(2p-1))=0$.
   (c) On a : $0=\mathbb{E}(M_1)=\mathbb{E}(M_T)=\mathbb{E}(S_T-(2p-1)T)=a-(2p-1)T$ donc $\mathbb{E}(T)=a/(2p-1)$.