UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
M1 MASS - Processus stochastiques - 2004-2005
Sylvain Rubenthaler

Partiel A - 30/03/05
Durée : 1h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.

1. Soit U une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(U=1)=p$, $\mathbb{P}(U=0)=1-p$ $(0<p<1)$. On jette un dé deux fois et on note X_1, X_2 les résultats obtenus. On suppose que U, X_1, X_2 sont indépendants. Soit :

$$S \begin{cases} = X_1 + X_2 \text{ si } U = 1 \\ = X_1 \text{ sinon } \quad . \end{cases}$$

   (a) Pour tout k, calculer $\mathbb{P}(S=k|U=0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_1=k)$.
   (b) Pour tout k, calculer $\mathbb{P}(S=k|U=1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_1+X_2=k)$.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(S|U=0)$, $\mathbb{E}(S|U=1)$.
   (d) En déduire $\mathbb{E}(S|U)$.
   (e) Calculer $\mathbb{E}(S)$.

2. Soient des variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) telles que $\mathbb{P}(X_1=1)=p$, $\mathbb{P}(X_1=-1)=1-p$ $(1/2<p<1)$. Soient $S_n = X_1+\cdots+X_n$, $M_n = S_n - n(2p-1)$. On se donne la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\ldots,X_n)$.

   (a) Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.
   (b) Soit a entier >0. Soit le temps d'arrêt $T=\inf\{n\geq 1 : S_n = a\}$. Calculer $\mathbb{E}(M_{n\wedge T})$ pour tout n.
   (c) On admet que $\mathbb{E}(M_T)=\mathbb{E}(M_1)$ et que $\mathbb{P}(T<\infty)=1$. Calculer $\mathbb{E}(T)$.