**UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS**
**M1 MASS - Processus stochastiques - 2004-2005**
**Sylvain Rubenthaler**

**Partiel B - 30/03/05**

*Durée : 1h.*

*Documents et calculatrices interdits.*

*La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.*

1. Soit $D$ le résultat d'un lancer de dé. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p$ $(0 < p < 1)$. On suppose que les $X_i$ et $D$ sont indépendantes. Soit $S + X_1 + \dots + X_D$.
   (a) Soit $j \in \{1, \dots, 6\}$, soit $k \geq 1$, exprimer $\mathbb{P}(S = k|D = j)$ à l'aide de $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_j = k)$.
   (b) Soit $j \in \{1, \dots, 6\}$, calculer $\mathbb{E}(S|D = j)$.
   (c) Exprimer $\mathbb{E}(S|D)$.
   (d) Calculer $\mathbb{E}(S)$.
2. Le petit Michel fait collection de nains contenus dans des boîtes de céréales. On note $X_i \in \{1, \dots, 7\}$ $(i = 1, 2, \dots)$ le modèle du nain contenu dans le $i$-ème paquet de céréales acheté (il y a 7 modèles de nains). Soit $T = \inf\{i : X_i \neq X_1\}$. Pour tout $n$, on note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.
   (a) Montrer que $T$ est un temps d'arrêt.
   (b) Soit $i \in \{1, \dots, 7\}$, calculer $\mathbb{P}(T = k|X_1 = i)$.
   (c) En déduire $\mathbb{P}(T = k)$.
   (d) Calculer $\mathbb{E}(T)$.