

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 1

1. (a)  $f([-3, -1]) = [1, 9]$ ,  $f([-3, 1]) = [0, 9]$ ,  $f(]-3, 1]) = [0, 9[$ .  
 (b)  $f^{-1}(]-\infty, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ,  $f^{-1}(]1, +\infty[) = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ ,  $f^{-1}(]-1, 0] \cup [1, 2]) = \{0\} \cup ]-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}[$ .

2. (a)  $\frac{\sin(x)}{\log(1+x)} \underset{x \rightarrow 0+}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \underset{x \rightarrow 0+}{\rightarrow} 1$   
 (b)  $(1 + \frac{2}{x})^x = e^{x \log(1 + \frac{2}{x})}$  et  $x \log(1 + \frac{2}{x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 2$  donc par continuité de la fonction exp :  $(1 + \frac{2}{x})^x \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} e^2$   
 (c)  $\frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)} = \frac{(x^2/2) + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1$   
 (d)  $\frac{1 - (1+x)^\alpha}{1 - (1+x)^\beta} = \frac{\alpha x + o(x)}{\beta x + o(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$

(a) on intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx &= [-x^2 e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x} dx \\ &= 0 + [-2x e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-x} dx \\ &= [-2e^{-x}]_0^{+\infty} = 2 \end{aligned}$$

(b) changement de variable :  $t = \log(z)$ ,  $z = e^t$ ,  $dz = e^t dt$

$$\begin{aligned} \int_{e^1}^{+\infty} \frac{1}{(\log(z))^2 z} dz &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \\ &= [-1/t]_1^{+\infty} = 1 \end{aligned}$$

(c) on décompose  $\frac{1}{(2-x)(1+x)} = \frac{1/3}{2-x} + \frac{1/3}{1+x}$  (toujours possible pour une fraction rationnelle à pôles simples) et donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x)(1+x)} dx = \left[ -\frac{1}{3} \log(2-x) + \frac{1}{3} \log(1+x) \right]_0^1 = \frac{1}{3} \log(4)$$

(d) changement de variable :  $t = \tan(x)$ ,  $x = \arctan(t)$ ,  $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} dx &= \int_0^{\pi/4} 1 + \tan^2(x) dx \\ &= \int_0^1 dt = 1 \end{aligned}$$

3. (a)  $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$ ,  $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$ .

(b) On intègre par parties pour tout  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(x) \sin(x) dx \\ &= [-\sin^{n+1}(x) \cos(x)]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \cos^2(x) dx \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

d'où  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ .

(c) Démonstration par récurrence de la formule pour  $I_{2p}$  (démonstration similaire pour  $I_{2p+1}$ ) :

• c'est vrai en  $p = 0$

• si c'est vrai jusqu'au rang  $p$  alors  $I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \frac{(2p+1)(2p-1)\dots 1}{(2p+2)(2p)\dots 2} \frac{\pi}{2}$

(d)  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2], 0 \leq \sin^{2p+1}(x) \leq \sin^{2p}(x) \leq \sin^{2p-1}(x)$  donc par intégration  $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$ , donc  $1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}$ , donc  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$

(e) on déduit de la question précédente :  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \right]^2 (2p+1) = 1$ , d'où la formule de Wallis

(f) On fait la démonstration pour  $n$  impair . Soit  $n = 2p + 1$  :

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)\dots 1} \\ &= \frac{\sqrt{p}}{2p+1} \sqrt{\frac{1}{p} \left( \frac{2p(2p+2)\dots 2}{(2p-1)\dots 1} \right)^2} \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(2p+1)}} \sqrt{\pi} . \end{aligned}$$