

Feuille d'exercices numéro 1

1. Rappel : Si $f : E \rightarrow F$ et $A \subset F$, $f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\}$. Si $C \subset E$, $f(C) = \{f(x), x \in C\}$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

- (a) Déterminer $f([-3, -1])$, $f([-3, 1])$, $f([-3, 1])$.
- (b) Déterminer $f^{-1}(]-\infty, 2])$, $f^{-1}(]1, +\infty[)$, $f^{-1}(]-1, 0] \cup [1, 2])$.

2. Calculer les limites suivantes :

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\log(1+x)}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x)^\alpha}{1 - (1+x)^\beta}$ pour $\alpha, \beta > 0$.

3. Calculer les intégrales suivantes :

- (a) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$
- (b) $\int_{e^1}^{+\infty} \frac{1}{(\log(z))^2 z} dz$
- (c) $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)(1+x)} dx$
- (d) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} dx$.

4. Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx .$$

- (a) Calculer I_0 et I_1 .
- (b) Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
- (c) En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1} .$$

- (d) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$. En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$.
- (e) En déduire la formule de Wallis :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left[\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \right]^2 = \pi .$$

- (f) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.