UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2004-2005 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 2

1. (a) $\bigcap_{n\geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)] = \emptyset$ car $1 \notin \bigcap_{n\geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)]$ et $\forall x \neq 1$, $\exists n$ tel que $x \notin]1, 1 + 1/(n+1)]$ et donc $x \notin \bigcap_{n\geq 0}]1, 1 + 1/(n+1)]$
   (b) $\bigcap_{n\geq 0}]1, 2 + 1/(n+1)] =]1, 2]$
   (c) $\bigcap_{n\geq 0}]1 - 1/(n+1), 2] = [1, 2]$
   (d) $\bigcup_{n\geq 0} [1/(n+1), +\infty[=]0, +\infty[$ donc $f^{-1}(\bigcup_{n\geq 0} [1/(n+1), +\infty[) = f^{-1}(]0, +\infty[) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$

2. (a) Soient $k \neq n, k < n$. $A_k \subset A_{n-1}$ donc $\forall x \in A_k$, $x \notin B_n$. Comme $B_k \subset A_k$, alors $B_k \cap B_n = \emptyset$
   (b) • Si $x \in (\underset{n\geq 0}{\cap} A_n)^c$ alors $x \notin \underset{n\geq 0}{\cap} A_n$ donc $\exists n$ tel que $x \notin A_n$. Donc $\exists n$ tel que $x \in A_n^c$. Donc $x \in \underset{n\geq 0}{\cup} A_n^c$.
   • Si $x \in \underset{n\geq 0}{\cup} A_n^c$ alors $\exists n$ tel que $x \notin A_n$. Donc $x \notin \underset{n\geq 0}{\cap} A_n$. Donc $x \in (\underset{n\geq 0}{\cap} A_n)^c$.
   Conclusion : $\underset{n\geq 0}{\cup} A_n^c = (\underset{n\geq 0}{\cap} A_n)^c$.
   (c) Par passage au complémentaire dans le résultat précécent : $(\underset{n\geq 0}{\cup} A_n^c)^c = \underset{n\geq 0}{\cap} A_n$.

3. On rappelle que "$A_1, \dots, A_n$ partition de $\mathbb{R}$" signifie que les ensembles A_i sont 2 à 2 disjoints et que $A_1 \cup \dots \cup A_n = \mathbb{R}$.
   (i) $\mathbb{R} = A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$
   (ii) Soit $\underset{i\in I}{\cup} A_i \in \mathcal{A}$, $(\underset{i\in I}{\cup} A_i)^c = \underset{i\notin I}{\cup} A_i \in \mathcal{A}$.
   (iii) Si on fait une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$: $\underset{n\geq 0}{\cup}(\underset{i\in I_n}{\cup} A_i) = \bigcup_{i\in \underset{n\geq 0}{\cup} I_n} A_i \in \mathcal{A}$.

4. Fait en cours

5. (a) Remarque : δ_x s'appelle la mesure de Dirac en x.
   (i) δ_x est bien une fonction de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty]$
   (ii) $\delta_x(\emptyset) = 0$ car $x \notin \emptyset$
   (iii) Si on a des éléments 2 à 2 disjoints de $\mathcal{A}$: $A_0, A_1, \dots$.

$$\begin{aligned}\delta_x(\underset{n\geq 0}{\cup} A_n) \quad & \begin{cases} = 1 & \text{si } x \in \underset{n\geq 0}{\cup} A_n \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ & \begin{cases} = 1 & \text{si } \exists n \text{ tel que } x \in A_n \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ & = \sum_{n\geq 0} \delta_x(A_n)\end{aligned}$$

car les A_n sont 2 à 2 disjoints (et donc au plus un seul d'entre eux contient x, c'est à dire au plus un seul d'entre eux est tel que $\delta_x(A_n) = 1$).

(b) On remarque que $\forall i$, δ_{x_i} est une mesure par la question précédente.

(i) μ est bien une fonction de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty]$

(ii) $\mu(\emptyset) = \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}(\emptyset) = 0$

(iii) Si on a des éléments 2 à 2 disjoints de $\mathcal{A}$: $A_0, A_1, \ldots$:

$$\begin{aligned}
\mu(\underset{n \geq 0}{\cup} A_n) &= \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}(\underset{n \geq 0}{\cup} A_n) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \sum_{n \geq 0} \delta_{x_i}(A_n) \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{1 \leq i \leq k} p_i \delta_{x_i}(A_n) \\
&= \sum_{n \geq 0} \mu(A_n) \ .
\end{aligned}$$