UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2004-2005 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Feuille d'exercices numéro 2

1. Rappel : Pour une famille d'ensemble $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note $\bigcap_{n\geq 0} A_n = \{x : \forall n, x \in A_n\}$ et $\bigcup_{n\geq 0} A_n = \{x : \exists n \text{ tel que } x \in A_n\}$
   (a) Déterminer $\bigcap_{n\geq 0}]1, 1 + 1/(n + 1)]$.
   (b) Déterminer $\bigcap_{n\geq 0}]1, 2 + 1/(n + 1)]$.
   (c) Déterminer $\bigcap_{n\geq 0}]1 - 1/(n + 1), 2]$.
   (d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}(\bigcup_{n\geq 0} [1/(n + 1), +\infty[)$.
2. Soit Ω un ensemble et soient $A_0, A_1, \dots$ des parties de Ω.
   (a) On suppose dans cette question que $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$. Posons pour tout $n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ (rappel : $A \setminus C = \{x \in A : x \notin C\}$). Montrer que les ensembles B_n sont deux à deux disjoints.
   (b) On note : $\forall A \subset \Omega$, $A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$. Montrer que $\underset{n\geq 0}{\cup} A_n^c = (\underset{n\geq 0}{\cap} A_n)^c$.
   (c) Montrer que $(\underset{n\geq 0}{\cup} A_n^c)^c = \underset{n\geq 0}{\cap} A_n$.
3. Soit $A_1, ..., A_n$ une partition de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i\in I} A_i : I \subset \{1, ..., n\}\}$ est une tribu. ($\mathcal{A}$ est constitué de toutes les réunions possibles d'ensembles A_i.)
4. Soit

$$\begin{array}{rcl} \text{Card} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & [0, +\infty] \\ A & \mapsto & \text{Card}(A) = \text{ le nombre d'éléments de } A\ . \end{array}$$

   Montrer que Card est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
5. On se donne un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.
   (a) Soit $x \in E$, on note

$$\begin{array}{rcl} \delta_x : \mathcal{A} & \to & [0, +\infty] \\ B & \mapsto & \delta_x(B) \begin{cases} = 1 & \text{si } x \in B \\ = 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{array}$$

   Montrer que δ_x est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.
   (b) Soient $x_1, ..., x_k$ des éléments distincts de E et $p_1, ..., p_k \in \mathbb{R}_+^*$. On note

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{A} & \to & [0, +\infty] \\ B & \mapsto & \mu(B) = \sum_{1\leq i\leq k} p_i \delta_{x_i}(B) \end{array}$$

   Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.