UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2004-2005 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 3

1. Les ensembles $[n, n+\frac{1}{2^n}[$ sont 2 à 2 disjoints donc $\lambda(A) = \sum_{n\geq 0} \lambda([n, n+\frac{1}{2^n}[) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = 2$.

2. (a) $\forall \epsilon > 0$, $\{x\} \subset [x, x+\epsilon]$ donc $\lambda(\{x\}) \leq \lambda([x, x+\epsilon]) = \epsilon$. Donc $\lambda(\{x\}) = 0$.
   (b) $\lambda(\cup_{n\geq 0}\{x_n\}) \leq \sum_{n\geq 0} \lambda(\{x_n\}) = 0$ par la question précédente.
   (c) $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc on peut écrire $\mathbb{Q} = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ donc $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ par la question précédente.

3. (a) On remarque que

$$\begin{aligned} A_n &= \{[x, x+10^{-(n+1)}[: x = 0, u_1 \dots u_n \text{ avec } u_1, \dots, u_n \in \{1,5\}\} \\ &= \bigcup_{x\in B_n} [x, x+10^{-(n+1)}[\end{aligned}$$

   où $B_n = \{x = 0, u_1 \dots u_n \text{ avec } u_1, \dots, u_n \in \{1,5\}\}$. On remarque que B_n est fini et que les intervalles $([x, x+10^{-(n+1)}[)_{x\in B_n}$ sont 2 à 2 disjoints. Donc :

$$\begin{aligned} \lambda(A_n) &= \sum_{x\in B_n} \lambda([x, x+10^{-(n+1)}[) \\ &= \mathrm{Card}(B_n) \times 10^{-(n+1)} = 2^n \times 10^{-(n+1)} . \end{aligned}$$

   (b) $\forall n$, $A_n \subset A_{n+1}$ donc par intersection décroissante : $\lambda(B) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(A_n) = 0$.

4. (a) $\mu([0,1]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx = \int_0^1 1dx = 1$
   $\mu([0,2]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,2]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx = \int_0^1 1dx = 1$
   $\mu([0,1/2]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1/2]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx = \int_0^{1/2} 1dx = 1/2$
   $\mu(\{1/2\}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{1/2\}}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{1/2\}}(x)dx = 0$ car $\lambda(\{1/2\}) = 0$
   (b) $\mu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{x>0}(x)e^{-x}dx = 1$
   $\mu(\{1\}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{1\}}(x)\mathbf{1}_{x>0}(x)e^{-x}dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{1\}}(x)e^{-1}dx = 0$ car $\lambda(\{1\}) = 0$
   $\mu([0,1]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{x>0}(x)e^{-x}dx = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1}$
   $\mu([1,+\infty[) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[1,+\infty]}(x)\mathbf{1}_{x>0}(x)e^{-x}dx = \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = e^{-1}$
   (c) $\mu([0,1]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{x>0}(x)xe^{-x^2/2}dx = \int_0^1 xe^{-x^2/2}dx = \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^1 = (1 - e^{-1/2})$