UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2004-2005 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 4

1. (a) $\forall x \in [0,1]$, $\sin(1/nx) \leq 1$ et 1 intégrable sur $[0,1]$. $\forall x \in [0,1]$, $\sin(1/nx) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par convergence dominée $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx = 0$

   (b) $\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{x\leq n} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$ et $\forall x \leq n$, $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \exp(n\log(1-\frac{x}{n})) \leq \exp(-x)$ (car pour tout u tel que $|u| \leq 1$, $\log(1+u) \leq u$). Donc $\forall x \geq 0$, $\mathbf{1}_{x\leq n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$ qui est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$. $\forall x \geq 0$,

$$\mathbf{1}_{x\leq n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \mathbf{1}_{x\leq n}\exp(n\log(1-\frac{x}{n})) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x}$$

   (car $\log(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$) donc par convergence dominée,

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1 \ .$$

   (c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}| \leq \frac{1}{(1+x^2)}$ qui est une fonction intégrable sur $]-\infty,+\infty[$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1+x^2)}$ car $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc par convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)}dx = [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi \ .$$

   (d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|} \leq e^{2-|x|}$ qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{1-|x|}$ donc par convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1-x}dx = 2e^1 \ .$$

   (e) $\forall x \geq 0$, $\arctan(x/n)e^{-x} \leq (\pi/2)e^{-x}$ qui est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$.$\forall x \geq 0$, $\arctan(x/n)e^{-x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\arctan(nx)e^{-x}dx = 0 \ .$$

2. (a) On a pour $0 \leq x \leq n$, $f_{n+1}(x)/f_n(x) = \exp(g_n(x))$.

$$g_n'(x) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{x}{(1-x/n)(1-x/(n+1))} \geq 0$$

   pour $0 \leq x \leq n$ donc g_n croissante sur $[0,n]$. $g_n(0) = 0$ donc $g_n(x) \geq 0$ $\forall x \in [0,n]$. Donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ $\forall x \in [0,n]$. C'est également vrai sur $[n,+\infty]$ donc f_n suite de fonctions croissante.

   (b) On a $\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. $\forall x \geq 0$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x+\alpha x}dx$ donc par convergence monotone, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x+\alpha x}dx$, donc :

$$I(\alpha)\begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{-1+\alpha} & \text{sinon .}\end{cases}$$

3. (a) Pour tout n, k, $0 \leq \frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{k(n+1)}\right) \leq \frac{1}{3^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Pour tout n, $\frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{k(n+1)}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3^n}$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}\left(1-\frac{1}{k(n+1)}\right)\right] = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}\ .$$

(b) Pour tout n, k, $\left|\frac{\sin(n/k)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Pour tout n, $\frac{\sin(n/k)}{2^n} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(n/k)}{2^n}\right] = 0\ .$$

4. Inégalité de Jensen.

(a) $\forall z, y \in I$ avec $z \leq y$, $\phi(y)-\phi(z) = \int_z^y \phi'(t)dt \geq \int_z^y \phi'(z)dt$ (car ϕ convexe), donc $\phi(y)-\phi(z) \geq \phi'(z)(y-z)$

(b) On prend $z = \int_E f(t)d\mu(t)$ et $y = f(x)$ dans l'inegalité précédente et on a :

$$\phi(f(x)) \geq \phi\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right) + \phi'\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right)(y-z)\ .$$

On intègre ensuite par rapport à $d\mu(x)$:

$$\begin{aligned}\int \phi(f(x))d\mu(x) &\geq \int \phi\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right)d\mu(x) + \int \phi'\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right)(y-z)d\mu(x)\\ &= \phi\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right) + \phi'\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right)\left(\int f(x)d\mu(x) - \int f(x)d\mu(x)\right)\\ &= \phi\left(\int_E f(t)d\mu(t)\right)\ .\end{aligned}$$

(c) La fonction $\phi : x \in [0,1] \mapsto x^2$ est convexe. Donc par le résultat précédent, pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ intégrable,

$$\left(\int_0^1 |f(x)|dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx.$$