UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2004-2005 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 5
Intégrales à paramètre, intégrales multiples.

1. (a) $\forall u > 0, \forall t > 0$, $\left|\frac{\sin(ut)}{t}e^{-t}\right| \leq e^{-t}$ qui est intégrable (sur $[0,+\infty]$) donc F est bien définie. Posons $f(u,t) = \frac{\sin(ut)}{t}e^{-t}$. On se restreint dans un premier temps à $u \in [0, M[$ pour $M > 0$ fixé.
   - $\forall u > 0$, $t \mapsto f(u,t)$ est mesrurable (car continue)
   - $\forall t > 0$ (donc pour p.t. $t \geq 0$), $u \mapsto f(u,t)$ est continue
   - $\forall u > 0, \forall t > 0$, $\left|\frac{\sin(ut)}{t}e^{-t}\right| \leq ue^{-t} \leq Me^{-t}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$ (et qui ne dépend pas de u)

   donc par le théorème de continuité sous l'intégrale, F est continue sur $[0, M[$. Cela est vrai $\forall M > 0$ donc F est continue sur $[0,+\infty[$.

   (b)
   - $\forall u > 0$, $t \mapsto f(u,t)$ est intégrable comme vu à la question précédente
   - $\forall t > 0$ (donc pour p.t. $t \geq 0$), $f(u,t)$ est dérivable par rapport à u sur $]0,+\infty[$
   - $\forall t > 0$ (donc pour p.t. $t \geq 0$), $\forall u > 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,t)\right| = |\cos(ut)e^{-t}| \leq e^{-t}$ qui est intégrable (sur $[0,+\infty]$)

   donc par le théorème de dérivation globale sous l'intégrale : F est dérivable en tout $u > 0$ et
$$F'(u) = \int_0^{+\infty} \cos(ut)e^{-t}dt \ .$$

   (c)
$$\begin{aligned} F'(u) &= \left[-\cos(ut)e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u\sin(ut)e^{-t}dt \\ &= 1 + [u\sin(ut)e^{-t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u^2\cos(ut)e^{-t}dt \\ &= 1 - u^2F'(u) \end{aligned}$$
   donc $F'(u) = \frac{1}{1+u^2}$.

   (d) Donc $F(u) = C + \arctan(u)$ avec C une constante.

2. (a)
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dx &= \frac{1}{(1+y)}\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\arctan(x\sqrt{y})\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)} \ . \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dxdy &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}dy \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+u^2}2du \\
&= \pi[\arctan(u)]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

où l'on a fait un changement de variable en $u=\sqrt{y}$, $du=\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$.

(c) Pour tout $x>0, x\neq 1$, on a par décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dy &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+x^2y}dy \\
&= \frac{1}{1-x^2}[\log(1+y) - \log(1+x^2y)]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{1-x^2}[\log\left(\frac{1+y}{1+x^2y}\right)]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{1-x^2}\log\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{2\log(x)}{x^2-1}\ .
\end{aligned}$$

(d) Par Fubini-Tonelli et puisque $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dy = \frac{2\log(x)}{x^2-1}$ pour p.t. $x\in[0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dxdy &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dydx \\
\frac{\pi^2}{2} &= \int_0^{+\infty} \frac{2\log(x)}{x^2-1}dx \\
\frac{\pi^2}{4} &= \int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2-1}dx\ .
\end{aligned}$$

3. Changement de variable :

$$\left\{\begin{array}{l} u = x+y \\ v = x-y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{array}\right. .$$

L'application :

$$\begin{aligned}
\phi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
(u,v) &\mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)
\end{aligned}$$

est bijective. On calcule le jacobien (c'est à dire que l'on écrit dans une matrice les dérivées partielles de ϕ en u et v) :

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

On fait le changement de variable dans l'intégrale et on utilise Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-(x+y)^2} e^{-(x-y)^2} dxdy &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-v^2} |\det(J(u,v)| dudv \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-v^2} \frac{1}{2} dudv \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} du \\
&= \frac{\pi}{2} \ .
\end{aligned}$$