

Feuille d'exercices numéro 6
Calculs d'espérances. Calculs de lois.

1. Soit X variable aléatoire réelle de loi de densité $\mathbf{1}_{x \geq 0} \lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$ fixé (loi exponentielle de paramètre λ). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$. Calculer la densité de la loi de $2X$. Calculer $\mathbb{E}(2X)$, $\text{Var}(2X)$.
2. Soit X variable aléatoire réelle de loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma, m \in \mathbb{R}$ fixés (loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$).
Soit U variable aléatoire réelle de loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
 - (a) Montrer que $\sigma U + m$ a même loi que X .
 - (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.
 - (c) Calculer la densité de la loi de $Y = aX + b$ pour a et b réels.
 - (d) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\text{Var}(Y)$.
3. Soit X variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que $\forall k \geq 0, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}$ ($\theta > 0$ fixé). Calculer $\mathbb{E}(X)$. Pour $u \geq 0$, calculer $\mathbb{E}(e^{-uX})$.
4. Soit (X, Y) variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 de loi de densité $\frac{3}{4} \exp(-|x + 2y| - |x - y|)$. Calculer la densité de la loi de $(X + 2Y, X - Y)$ puis les densités des lois de X et Y . (On pourra utiliser un changement de variable approprié.)
5. Soit Y variable aléatoire réelle de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Montrer que $1/Y$ a même loi que Y .