

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 7
 Indépendance et calculs de lois.

1. Soit $f \in C_b^+(\mathbb{R})$, on calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X)) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1 + (1+x^2)^2 y^2} dx dy \\ \text{par Fubini-Tonelli} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (1+x^2)^2 y^2} dy \right) dx .\end{aligned}$$

Donc la densité de X est la fonction de x suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (1+x^2)^2 y^2} dy &= \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{1+x^2} \arctan((1+x^2)y) \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} .\end{aligned}$$

2. Soit $f \in C_b^+(\mathbb{R})$, on calcule :

$$\mathbb{E}(f(X/Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u/v) \frac{1}{2\pi} e^{-u^2/2} e^{-v^2/2} du dv$$

On fait un changement de variable en $s = u/v, t = v, u = st, v = t$. La matrice jacobienne est :

$$J(s, t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$$

de déterminant t . On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X/Y)) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} f(s) |t| e^{-(st)^2/2} e^{-t^2/2} ds dt \\ \text{par Fubini-Tonelli} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(st)^2/2} e^{-t^2/2} |t| dt \right) ds .\end{aligned}$$

Donc la densité de X/Y est la fonction de s suivante (par parité) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(st)^2/2} e^{-t^2/2} |t| dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-(st)^2/2} e^{-t^2/2} t dt \\ (\text{changement de variable } z = \sqrt{1+s^2} \times t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-z^2/2} z \frac{1}{1+s^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-e^{-z^2/2} \frac{1}{1+s^2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+s^2} .\end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X/Y|) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |s| \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+s^2} ds \\ (\text{parité}) &= \int_0^{+\infty} s \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+s^2} ds \\ &= +\infty\end{aligned}$$

car $\frac{s}{1+s^2} \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{s}$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$. Donc X/Y n'est pas intégrable.

3. Soit $f \in C_b^+(\mathbb{R}^2)$, on calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X+Y, X-Y)) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x+y, x-y) \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} dx dy \\ (\text{changement de variable déjà vu : } u=x+y, v=x-y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} f(u, v) e^{-(u+v)^2/8} e^{-(u-v)^2/8} \frac{1}{2} du dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(u, v) e^{-u^2/4} e^{-v^2/4} \frac{1}{4\pi} du dv\end{aligned}$$

Donc la densité de $(X+Y, X-Y)$ est la fonction $(u, v) \mapsto e^{-u^2/4} e^{-v^2/4} \frac{1}{4\pi}$. C'est un produit d'une fonction de u et d'une fonction de v donc $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

4. Les variables X et Y sont à valeurs dans \mathbb{N} donc $X+Y$ aussi. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=n) &= \mathbb{P}(\{X=0 \text{ et } Y=n\} \cup \{X=1 \text{ et } Y=n-1\} \cup \dots \cup \{X=n \text{ et } Y=0\}) \\ \text{événements disjoints} &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X=k \text{ et } Y=n-k) \\ \text{indépendance} &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X=k) \mathbb{P}(Y=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \frac{\mu^{n-k} e^{-\mu}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{n!} (\lambda + \mu)^n.\end{aligned}$$

Donc $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

5. (a) • Si X est symétrique :
 $\forall \phi \in C_b^+(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(X)) &= \mathbb{E}(\phi(-X)) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(-t) f(t) dt \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) f(-u) du \quad (\text{changement de variable } u = -t) .\end{aligned}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)(f(t) - f(-t)) dt = 0$. Cela est vrai $\forall \phi \in C_b^+(\mathbb{R})$ donc $f(t) - f(-t)$ est nulle presque partout donc $f(t) = f(-t)$ pour presque tout t .

• Si $f(t) = f(-t)$ pour presque tout t :

$\forall \phi \in C_b^+(\mathbb{R}),$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(-X)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(-t)f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)f(-t)dt \text{ (par changement de variable)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)f(t)dt \text{ (car } f(t) \text{ et } f(-t) \text{ coïncident presque partout)}\end{aligned}$$

donc $-X$ est de densité $t \mapsto f(t)$ comme X donc X est symétrique.

(b) Exemple de loi symétrique : $X = 1$ avec probabilité $1/2$ et $X = -1$ avec probabilité $1/2$.

(c) • Si X est symétrique :
Pour tout u :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{iuX}) &= \mathbb{E}(e^{-iuX}) \\ &= \overline{\mathbb{E}(e^{iuX})}.\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(e^{iuX}) \in \mathbb{R}$.

• Si $\mathbb{E}(e^{iuX}) \in \mathbb{R}, \forall u$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{iu(-X)}) &= \overline{\mathbb{E}(e^{iuX})} \\ &= \mathbb{E}(e^{iuX}).\end{aligned}$$

Donc X et $-X$ ont même fonction caractéristique donc X et $-X$ ont même loi donc X est symétrique.

(d) Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

- Si $1 \in A_1$ et $-1 \in A_1, \mathbb{P}(\epsilon \in A_1, |X| \in A_2) = \mathbb{P}(|X| \in A_2) = \mathbb{P}(\epsilon \in A_1)\mathbb{P}(|X| \in A_2)$.
- Si $1 \in A_1$ et $-1 \notin A_1, \mathbb{P}(\epsilon \in A_1, |X| \in A_2) = \mathbb{P}(\epsilon = 1, |X| \in A_2) = \mathbb{P}(X > 0, X \in A_2) = \mathbb{P}(X < 0, -X \in A_2)$ car X symétrique donc $\mathbb{P}(\epsilon \in A_1, |X| \in A_2) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X > 0, X \in A_2) + \mathbb{P}(X < 0, -X \in A_2)) = \mathbb{P}(\epsilon \in A_1)\mathbb{P}(|X| \in A_2)$.
- Si $1 \notin A_1$ et $-1 \in A_1$, on montre de même que $\mathbb{P}(\epsilon \in A_1, |X| \in A_2) = \mathbb{P}(\epsilon \in A_1)\mathbb{P}(|X| \in A_2)$.
- Si $1 \notin A_1$ et $-1 \notin A_1, \mathbb{P}(\epsilon \in A_1, |X| \in A_2) = 0 = \mathbb{P}(\epsilon \in A_1)\mathbb{P}(|X| \in A_2)$.

On a donc toujours $\mathbb{P}(\epsilon \in A_1, |X| \in A_2) = \mathbb{P}(\epsilon \in A_1)\mathbb{P}(|X| \in A_2)$, donc ϵ et $|X|$ sont indépendants.

(e) On calcule la fonction caractéristique ;

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{iu(Y-Y')}) &= \mathbb{E}(e^{iuY}e^{-iuY'}) \\ &= \mathbb{E}(e^{iuY})\mathbb{E}(e^{-iuY'}) \text{ (par indépendance)} \\ &= \mathbb{E}(e^{iuY'})\mathbb{E}(e^{-iuY}) \text{ (car } Y \text{ et } Y' \text{ ont même loi)} \\ &= \mathbb{E}(e^{iu(Y'-Y)}) \\ &= \overline{\mathbb{E}(e^{iu(Y-Y')})}.\end{aligned}$$

Donc par la question 5c, $Y - Y'$ est symétrique.