

Feuille d'exercices numéro 7
Indépendance et calculs de lois.

1. Soit (X, Y) variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 densité $\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1+(1+x^2)^2 y^2}$. Calculer la loi de X .
2. Soit (X, Y) variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 de densité $\frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} e^{-y^2/2}$. Calculer la loi de X/Y . Cette variable est-elle intégrable ?
3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.
4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et que Y suit une loi de Poisson de paramètre μ . Calculer la loi de $X + Y$.
5. X une variable aléatoire dans \mathbb{R} est dite symétrique si $-X$ a même loi que X .
 - (a) Si X a une densité f , montrer que : X est symétrique si et seulement si $f(x) = f(-x)$ pour presque tout x .
 - (b) Donner un exemple de loi symétrique.
 - (c) Montrer que X est symétrique si et seulement si le nombre $\mathbb{E}(e^{iuX})$ est réel $\forall u \in \mathbb{R}$.
 - (d) Soit X variable aléatoire dans \mathbb{R} symétrique. On suppose $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. On note :

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{si } X = 0 \\ -1 & \text{si } X < 0 . \end{cases}$$

Montrer que ϵ et $|X|$ sont indépendantes.

- (e) Si Y et Y' sont deux variables aléatoires réelles de même loi et indépendantes, montrer que $Y - Y'$ est symétrique.