UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Licence MASS - Intégration et Probabilités - 2004-2005 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Feuille d'exercices numéro 8

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > t_1 + t_2 | X > t_1) &= \frac{\mathbb{P}(\{X > t_1 + t_2\} \cap \{X > t_1\})}{\mathbb{P}(X > t_1)} \\
(\text{car } \{X > t_1 + t_2\} \subset \{X > t_1\}) &= \frac{\mathbb{P}(X > t_1 + t_2)}{\mathbb{P}(X > t_1)} \\
&= e^{-\lambda(t_1+t_2)} e^{\lambda t_1} = e^{-\lambda t_2} = \mathbb{P}(X > t_2)
\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}
F(t) = \mathbb{P}(\sup(U, X) \leq t) &= \mathbb{P}(U \leq t, X \leq t) \\
(\text{indépendance}) &= \mathbb{P}(U \leq t)\mathbb{P}(X \leq t) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t(1 - e^{-t}) & \text{si } t \in]0, 1[\\ 1 - e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) On remarque que F est continue et qu'elle a des points anguleux en 0 et 1.

3. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= 1 + \mathbb{E}(N - 1) \\
&= 1 + \sum_{n \geq 0} n \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n \geq 1} n \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \\
&= 1 + (\lambda T) e^{-(\lambda T)} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda T)^k}{k!} \\
&= 1 + \lambda T
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N \geq m + p) &= \mathbb{P}(\text{ on a utilisé plus de } m + p \text{ ampoules}) \\
&= \mathbb{P}(\text{les } m + p \text{ premières ampoules ont déjà grillé }) \\
&= \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{m-1+p} < T)
\end{aligned}$$

(c) On remarque que $\mathrm{Var}(X_1) = 1/\lambda$, $\mathbb{E}(X_1) = 1/\lambda$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N \geq m + p) &= \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{m-1+p} < T) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - \mathbb{E}(X_1) + \cdots + X_{m-1+p} - \mathbb{E}(X_{m-1+p})}{(1/\lambda)\sqrt{m - 1 + p}} < \frac{T - (m - 1 + p)/\lambda}{(1/\lambda)\sqrt{m - 1 + p}} \right) \\
(\text{TCL}) &\approx \int_{-\infty}^{\frac{T-(m-1+p)/\lambda}{(1/\lambda)\sqrt{m-1+p}}} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \, .
\end{aligned}$$

On calcule : $\frac{T-(m-1+p)/\lambda}{(1/\lambda)\sqrt{m-1+p}} = -1$. On a par parité :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt &= \int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\
&= 1 - \int_{-infty}^{1} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\
\text{(d'après la table)} &= 1 - 0,8413 = 0.1587 \ .
\end{aligned}$$

(d) Ici, on cherche p pour que $\mathbb{P}(N \geq m+p) \leq 0.05$. Comme avant :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N \geq m+p) &\approx \int_{-\infty}^{\frac{T-(m-1+p)/\lambda}{(1/\lambda)\sqrt{m-1+p}}} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{-\frac{T-(m-1+p)/\lambda}{(1/\lambda)\sqrt{m-1+p}}} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt \ .
\end{aligned}$$

On regarde la table et on voit qu'il faut prendre $-\frac{T-(m-1+p)/\lambda}{(1/\lambda)\sqrt{m-1+p}} \geq 1.65$. Notons $x = \sqrt{m+p-1}$. Il suffit que $-\frac{20-x^2/\lambda}{x} = 1.65$, c'est à dire $x^2 - 1.65x - 20 = 0$. À l'aide d'une calculatrice, on trouve qu'il suffit que $p \geq 27$.