UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 2 IMEA, Ingénierie stochastique, 2009-2010
Sylvain Rubenthaler
http ://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de l'examen - mercredi 6 janvier 2010

Durée : 3h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

Ex. 1 (a) $f(x) = \mathbf{1}_{0\leq x\leq 1}\sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \mathbf{1}_{x>0}e^{-x}$.

(b) On reconnaît un algorithme de rejet. La variable `a(1,1)` est de loi de densitée f.

(c) i. La probabilité de succès dans la boucle `while` est

$$\begin{aligned} p &= \int_{u\in[0;1]}\int_{x\in\mathbb{R}^+}\mathbf{1}_{Cug(x)\leq f(x)}e^{-x}dxdu \\ &= \int_{x\in\mathbb{R}^+}\frac{f(x)}{Cg(x)}\times g(x)dx \\ &= \frac{1}{C}\ . \end{aligned}$$

Notons T la variable `a(1,2)`. Alors $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T=k) = \left(1-\frac{1}{C}\right)^{k-1}\frac{1}{C}$.

ii.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \sum_{k\geq 1}k\left(1-\frac{1}{C}\right)^{k-1}\frac{1}{C} \\ &= \frac{1}{C}\frac{d}{dx}\left(\sum_{k\geq 0}x^k\right)\Bigg|_{x=1-1/C} \\ &= \frac{1}{C}\times C^2 = C\ . \end{aligned}$$

(d) i. On reconnaît une méthode de Monte-Carlo qui approche

$$\int_0^1\sin(x)f(x)dx = \int_0^1\sin(x)\times\frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx\ .$$

ii. Soient $J_1, J_2, \ldots$ i.i.d. de même loi que T. La variable N a même loi que $J_1+\cdots+J_n$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N=n+1) &= \sum_{j=1}^n\mathbb{P}(J_1=1,\ldots,J_{i-1}=1,J_{i+1}=1,\ldots,J_n=1 \text{ et } J_i=2) \\ &= n\left(\frac{1}{C}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{C}\right)\frac{1}{C} \\ &= n\left(\frac{1}{C}\right)^{n+1}\ . \end{aligned}$$

Ex. 2 On reconnaît une méthode de Monte-Carlo qui approche

$$\begin{aligned} \int_0^1 cos(2u)du &= [\sin(2u)/2]_0^1 \\ &= \sin(2)/2\ . \end{aligned}$$

Ex. 3 (a) La somme de chaque ligne de P est égale à 1. On en déduit

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/20 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(b) Un dessin nous montre que E est formé de deux classes récurrentes $\mathcal{R}_1 = \{3, 4\}$, $\mathcal{R}_2 = \{5, 6\}$ et d'une classe transitoire $\mathcal{T} = \{1, 2\}$.

(c) Pour trouver la probabilité invariante à support dans $\mathcal{R}_2$, on doit résoudre le système

$$[x, y] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = [x, y], x + y = 1$$

On trouve $x = y = 1/2$. Donc la probabilité invariante à support dans $\mathcal{R}_2$ est $u = [0, 0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2]$.
De même, on trouve que la probabilité invariante à support dans $\mathcal{R}_1$ est $v = [0, 0, 4/7, 3/7, 0, 0]$.
On en déduit que l'ensemble des probabilités invariantes est $\{\lambda u + (1 - \lambda)v, \lambda \in [0; 1]\}$.