

Partiel 1 - sujet B - corrigé

Durée : 1h. Documents, calculatrices et téléphones interdits. Toutes les réponses valent 3 points.

1.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \cos(x) dx &= [x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x) dx \\ &= 0 - [-\cos(x)]_0^\pi \\ &= \cos(\pi) - \cos(0) = -2.\end{aligned}$$

2. La variable $U + V$ est à valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2\}$. Calculons $\mathbb{P}(U + V = -1) = \mathbb{P}(U = -1, V = 0) = \frac{1}{12}$, $\mathbb{P}(U + V = 0) = \mathbb{P}(\{U = -1, V = 1\}) = \frac{3}{12}$, $\mathbb{P}(U + V = 1) = \mathbb{P}(U = -1, V = 1) = \frac{3}{12}$, $\mathbb{P}(U + V = 2) = \mathbb{P}(U = 1, V = 1) = \frac{6}{12}$.

3. On calcule la dérivée là où c'est possible et on obtient la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0; 1] \\ x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in]0; 1[. \end{cases}$$

(et on ne se préoccupe pas des valeurs en 0, 1).

4. Calculons : $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathbf{1}_{[1;3]}(x) \frac{1}{2} dx = \int_1^3 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^3 = \frac{9-1}{4} = 2$, $\mathbb{E}(X^2) = \int_1^3 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_1^3 = \frac{27-1}{6} = \frac{13}{3}$. Donc $\text{Var}(X) = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$.

5. $\mathbb{P}(X \in \{0, 1\}) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = e^{-2}(1 + 2) = 3e^{-2}$.

6. $\mathbb{P}(Z < 1/3) = \mathbb{P}(X < 1/3, Y < 1/3) = \mathbb{P}(X < 1/3) \times \mathbb{P}(Y < 1/3) = \frac{1}{9}$.

7. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ (série géométrique)