

Partiel 1 - sujet C - corrigé

Durée : 1h. Documents, calculatrices et téléphones interdits. Toutes les réponses valent 3 points.

1. Par la loi des grands nombres :

$$\frac{U_1 + \dots + U_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}(U_1) = 1.$$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{]-\infty; t]}(u) \times \mathbf{1}_{[0; +\infty[}(u) \times 2e^{-2u} du \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \int_0^t 2e^{-2u} du = 1 - e^{-2t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \times \mathbf{1}_{[-1; 1]}(x) \times \frac{3x^2}{2} dx \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{3x^3}{2} dx = \left[\frac{3x^4}{8} \right]_{-1}^{+1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times \mathbf{1}_{[-1; 1]}(x) \times \frac{3x^2}{2} dx \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{3x^4}{2} dx = \left[\frac{3x^5}{10} \right]_{-1}^{+1} = \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

$$\text{donc } \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{3}{5}.$$

4. Intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx &= [x(-\cos(x))]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx \\ &= \pi - (-\pi \times (-(-1))) + [\sin(x)]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

$$5. \mathbb{P}(X \in \{0, 1\}) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = C_3^0 (1/2)^0 (1 - 1/2)^{3-0} + C_3^1 (1/2)^1 (1 - 1/2)^{3-1} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}.$$

6. La variable $Y = Z - 1$ est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Donc

$$\mathbb{P}(2Z \leq 2) = \mathbb{P}(Z \leq 1) = \mathbb{P}(Y \leq 0) = 0,5.$$

7. Formule du cours :

$$C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{6 \times 5}{2} \frac{1}{2^6} = \frac{15}{2^6} = \frac{15}{64}.$$