M1 IM, université Nice Sophia Antipolis
Séries temporelles
Sylvain Rubenthaler
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé de la feuille d'exercices no 4

(1) (a) Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) &= \sum_{t=1}^{n} -2(x_t - a - bt)\\ \frac{\partial F}{\partial b}(a,b) &= \sum_{t=1}^{n} -2t(x - a - bt)\,.\end{aligned}$$

Notons

$$\overline{x}_n = \sum_{t=1}^{n} x_t\,,\ \overline{s}_n = \sum_{t=1}^{n} t x_t\,.$$

Nous cherchons à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\overline{x}_n + an + b\frac{n(n+1)}{2} &=& 0\\ -\overline{s}_n + a\frac{n(n+1)}{2} + b\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &=& 0\,. \end{array}\right.$$

Nous calculons la valeur de l'unique solution :

$$\begin{aligned}(-\overline{x}_n + an)\times\frac{(2n+1)}{3} - \left(-\overline{s}_t + a\frac{n(n+1)}{2}\right) &= 0\\ an\left(\frac{(2n+1)}{3} - \frac{(n+1)}{2}\right) &= \overline{x}_n \times \frac{(2n+1)}{3} - \overline{s}_n\\ a &= \frac{2(2n+1)\overline{x}_n - 6\overline{s}_n}{n-1}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\overline{x}_n + b\frac{n(n+1)}{2}\right)\times\frac{(n+1)}{2} - \left(-\overline{s}_n + b\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) &= 0\\ b\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n+1}{2} - \frac{2n+1}{3}\right) &= \frac{(n+1)}{2}\overline{x}_n - \overline{s}_n\\ b &= \frac{6(n+1)\overline{x}_n - 12\overline{s}_n}{n(n+1)(n-1)}\,.\end{aligned}$$

(b) Calculons les dérivées secondes de F (pour voir une autre méthode que celle vue en cours, vous choisissez celle que vous préférez) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}(a,b) &= 2n\\ \frac{\partial^2 F}{\partial b^2}(a,b) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b}(a,b) &= n(n+1)\,.\end{aligned}$$

La matrice hessienne de F en (a,b) est donc

$$F^{''}(a,b) = \begin{bmatrix} 2n & n(n+1)\\ n(n+1) & \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\end{bmatrix}\,.$$

La forme quadratique associée est :

$$\begin{aligned}(x,y) \quad \mapsto \quad & 2nx^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}y^2 + 2n(n+1)xy \\ & = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\left(y - \frac{3x}{(2n+1)}\right)^2 - \frac{3n(n+1)}{(2n+1)}x^2 + 2nx^2 \\ & = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\left(y - \frac{3x}{(2n+1)}\right)^2 + x^2\left(\frac{n^2-n}{2n+1}\right).\end{aligned}$$

On voit que $n^2 - n > 0$ pour $n \geq 2$ et que donc la forme quadratique est définie positive. Donc F est strictement convexe. Donc le point critique trouvé est un minimum absolu.

(2) (vu en cours)

(a) Soit n le degré de P, on suppose $n \geq 1$. Le polynôme P peut s'écrire $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ (avec $a_0, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}$). Et donc

$$\begin{aligned}\Delta P(X) &= (a_n(X-T)^n + \cdots + a_0) - (a_nX^n + \cdots + a_0) \\ &= a_n\sum_{i=0}^{n}[C_n^iX^i(-T)^{n-i}] - a_nX^n \\ &\quad +(a_{n-1}(X-T)^{n-1} + \cdots + a_0) - (a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0) \\ &= a_n\sum_{i=0}^{n-1}[C_n^iX^i(-T)^{n-i}] \\ &\quad +(a_{n-1}(X-T)^{n-1} + \cdots + a_0) - (a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0).\end{aligned}$$

Donc $\deg(\Delta P) \leq n - 1 = \deg(P) - 1$. Dans le cas $n = 0$, le même calcul montre que $\Delta P = 0$.

(b) Soit n le degré de P. Par la question précédente, nous savons que si $\deg(P) \leq k - 1$, alors $\Delta^k P = 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\deg(P) \geq k$.

(3) (a) Nous avons (pour tout n)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\left(X_n - \frac{1}{2}X_{n-1}\right)\right) &= \alpha^2 \\ \sigma(0) + \frac{1}{4}\sigma(0) - \sigma(1) &= \alpha^2 \\ \frac{5}{4}\sigma(0) - \sigma(1) &= \alpha^2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma(1) &= \mathrm{Cov}(X_n, X_{n-1}) \\ &= \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{2}X_{n-1} + \epsilon_n, X_{n-1}\right) \\ &= \frac{\sigma(0)}{2} + 0.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\frac{5}{4}\sigma(0) - \frac{\sigma(0)}{2} &= \alpha^2 \\ \sigma(0) &= \frac{4}{3}\alpha^2\end{aligned}$$

et

$$\sigma(1) = \frac{2}{3}\alpha^2.$$

La formule de récurrence pour les $\sigma(.)$ est

$$\sigma(h+1) = \frac{1}{2}\sigma(h)\,.$$

Donc, pour tout h,

$$\sigma(h) = \frac{2^{2-h}}{3}\alpha^2\,.$$

(b) Nous avons (pour tout n)

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Var}(X_n) & = \mathrm{Var} & \left(\frac{1}{6}X_{n-1} + \frac{1}{6}X_{n-2} + \epsilon_n\right) \\
\sigma(0) & = & \frac{1}{36}\sigma(0) + \frac{1}{36}\sigma(0) + \alpha^2 + \frac{2}{36}\sigma(1) + 0 \\
36\sigma(0) & = & 2\sigma(0) + 2\sigma(1) + 36\alpha^2 \\
34\sigma(0) & = & 2\sigma(1) + 36\alpha^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Cov}(X_n, X_{n-1}) & = & \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{6}X_{n-1} + \frac{1}{6}X_{n-2} + \epsilon_n, X_{n-1}\right) \\
\sigma(1) & = & \frac{1}{6}\sigma(0) + \frac{1}{6}\sigma(1) + 0 \\
5\sigma(1) & = & \sigma(0)\,.
\end{array}$$

D'où

$$\begin{array}{rcl}
170\sigma(1) - 2\sigma(1) & = & 36\alpha^2 \\
168\sigma(1) & = & 36\alpha \\
\sigma(1) & = & \frac{36}{168}\alpha^2 = \frac{3\alpha^2}{14}
\end{array}$$

et

$$\sigma(0) = \frac{15}{14}\alpha^2\,.$$

Nous remarquons que 2 est racine de P, ce qui permet de factoriser :

$$P(z) = 1 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}z^2 = \left(1 - \frac{z}{2}\right)\left(1 + \frac{z}{3}\right)\,.$$

Donc les racines du polynôme sont $\{2; -3\}$. La relation de récurence sur les auto-covariances est la suivante :

$$\sigma(h+2) = \frac{\sigma(h+1) + \sigma(h)}{6}\,,$$

de polynôme caractéristique $Q(z) = z^2 - z/6 - 1/6$ dont les racines sont inverses de celles de P. Les racines de Q sont donc $\{1/2; -1/3\}$. Donc $\sigma(h)$ s'écrit sous la forme

$$\sigma(h) = \frac{a}{2^h} + \frac{b}{(-3)^h}\,.$$

Nous déterminons a et b à partir de $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$:

$$\begin{cases} a + b & = \sigma(0) \\ \frac{a}{2} - \frac{b}{3} & = \sigma(1)\,. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{array}{rcl}
a\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) & = & \frac{\sigma(0)}{3} + \sigma(1) \\
a \times \frac{5}{6} & = & \left(\frac{5}{14} + \frac{3}{14}\right)\alpha^2 \\
a & = & \frac{24}{35}\alpha^2\,,
\end{array}$$

et

$$\begin{aligned} b &= \sigma(0) - a \\ &= \left(\frac{15}{14} - \frac{24}{35}\right)\alpha^2 \\ &= \left(\frac{75-48}{70}\right)\alpha^2 = \frac{27}{70}\alpha^2 \,. \end{aligned}$$

(c) Nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X_n) &= \mathrm{Var}\left(X_{n-1} - \frac{1}{2}X_{n-2} + \epsilon_n\right) \\ \sigma(0) &= \sigma(0) + \frac{\sigma(0)}{4} - \sigma(1) + \alpha^2 \\ -\frac{\sigma(0)}{4} + \sigma(1) &= \alpha^2 \,, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_n, X_{n-1}) &= \mathrm{Cov}\left(X_{n-1} - \frac{1}{2}X_{n-2} + \epsilon_n, X_{n-1}\right) \\ \sigma(1) &= \sigma(0) - \frac{\sigma(1)}{2} \\ \frac{3\sigma(1)}{2} &= \sigma(0) \,. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} -\frac{3\sigma(1)}{8} + \sigma(1) &= \alpha^2 \\ \sigma(1) &= \frac{8}{5}\alpha^2 \,, \end{aligned}$$

et

$$\sigma(0) = \frac{12}{5}\alpha^2 \,.$$

Soit le polynôme $P(z) = 1 - z + z^2/2$. Son discriminant est :

$$\Delta = 1 - \frac{4}{2} = -1 \,.$$

Les racines de P sont donc

$$\{1+i\,;\,1-i\} \,.$$

Le polynôme caractéristique de la relation de récurence des $\sigma(h)$ est

$$Q(z) = z^2 - z + \frac{1}{2} \,,$$

dont les racines sont les inverses de celles de P et sont donc

$$\left\{\frac{1}{1+i}\,;\,\frac{1}{1-i}\right\} = \left\{\frac{1-i}{2}\,;\,\frac{1+i}{2}\right\}$$

(nous aurions pu les calculer directement, sans passer par P). Les $\sigma(h)$ sont donc de la forme

$$\sigma(h) = a2^{-h}(1-i)^h + b2^{-h}(1+i)^h \,.$$

Nous déterminons a et b à partir de $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} a+b & = \sigma(0) \\ \frac{a}{2}(1-i) + \frac{b}{2}(1+i) & = \sigma(1) \,. \end{array}\right.$$

D'où

$$\begin{array}{rcl}\frac{a}{2}(1+i-(1-i)) & = & \frac{\sigma(0)(1+i)}{2}-\sigma(1)\\ ia & = & \frac{\sigma(0)(1+i)}{2}-\sigma(1)\\ a & = & -i\times\left(\frac{6}{5}\alpha^2+\frac{6i}{5}\alpha^2-\frac{8}{5}\alpha^2\right)\\ a & = & \frac{6}{5}\alpha^2+\frac{2i}{5}\alpha^2\,,\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}b & = & \sigma(0)-a\\ & = & \frac{12}{5}\alpha^2-\left(\frac{6}{5}\alpha^2+\frac{2i}{5}\alpha^2\right)\\ & = & \frac{6}{5}\alpha^2-\frac{2i}{5}\alpha^2\,.\end{array}$$

Nous avons donc pour tout h (avec $\mathcal{R}$ désignant la partie réelle)

$$\begin{array}{rcl}\sigma(h) & = & \frac{2\alpha^2}{5}\left((3+i)2^{-h}(1-i)^h+(3-i)2^{-h}(1+i)^h\right)\\ & = & \frac{4\alpha^2}{5}\mathcal{R}\left((3+i)2^{-h}(1-i)^h\right)\\ & = & \frac{4\alpha^2}{5}\mathcal{R}\left((3+i)2^{-h}(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^h\right)\\ & = & \frac{4\alpha^2}{5}\mathcal{R}\left((3+i)2^{-h/2}(\cos(-h\pi/4)+i\sin(-h\pi/4))\right)\\ & = & \frac{4\alpha^2}{5}\left(3.2^{-h/2}\cos(h\pi/4)+2^{-h/2}\sin(h\pi/4)\right)\,.\end{array}$$

(4) (a) Si $a\neq 0$, le polynôme associé à ce processus est $P(z)=1-az$, de racine $1/a$. Dans ce cas, on sait qu'il exise une suite stationnaire vérifiant la relation voulue si $|1/a|>1$, c'est à dire $|a|<1$.

(b) Nous avons (pour tout t)

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Var}(X_t) & = & \mathrm{Var}(aX_{t-1}+\epsilon_t)\\ \sigma(0) & = & a^2\sigma(0)+\sigma^2\\ \sigma(0) & = & \frac{\sigma^2}{1-a^2}\,.\end{array}$$

(c) La relation de récurence vérifiée par les auto-covariances est la suivante :

$$\sigma(h+1)=a\sigma(h)\,.$$

Nous en déduisons que pour tout h :

$$\sigma(h)=\frac{\sigma^2a^h}{1-a^2}\,.$$

(d) Donc $\sigma(h)\underset{h\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

(e) Pour $h\geq 1$:

$$\rho(h)=\frac{\sigma(h)}{\sigma(0)}=a^h\,.$$

(f) Pour tout t, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} X_t &= aX_{t-1} + \epsilon_t \\ &= a^2 X_{t-2} + a\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= a^3 X_{t-3} + a^2\epsilon_{t-2} + a\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &\vdots \\ &= a^t X_0 + \sum_{i=1}^{t} a^{t-i}\epsilon_i\,. \end{aligned}$$

Fixons maintenant n. La donnée de X_1, ..., X_{n-1} est équivalente à la donnée de $aX_0 + \epsilon_1$, ϵ_2, ϵ_3, ... , ϵ_{n-1} (les variables de la deuxième liste se déduisent de celle de la deuxième liste, et vice-versa). Nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n|X_1,\dots X_{n-1}) &= \mathbb{E}(a^n X_0 + a^{n-1}\epsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a^{n-i}\epsilon_i + \epsilon_n|aX_0+\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_{n-1}) \\ &= a^n X_0 + a^{n-1}\epsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a^{n-i}\epsilon_i + \mathbb{E}(\epsilon_n|aX_0+\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_{n-1}) \\ &= a^n X_0 + a^{n-1}\epsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a^{n-i}\epsilon_i + \mathbb{E}(\epsilon_n) \\ &= a^{n-1}X_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a^{n-i}\epsilon_i\,, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_0|X_1,\dots,X_{n-1}) &= \mathbb{E}(X_0|X_1) \\ &= \frac{X_1}{a}\,. \end{aligned}$$

Donc

$$X_n - \mathbb{E}(X_n|X_1,\dots X_{n-1}) = \epsilon_n\,,$$

$$X_0 - \mathbb{E}(X_0|X_1,\dots,X_{n-1}) = X_0 - \frac{X_1}{a} = -\frac{\epsilon_1}{a}\,.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_0 - \mathbb{E}(X_0|X_1,\dots,X_{n-1}), X_n - \mathbb{E}(X_n|X_1,\dots X_{n-1})) &= \mathrm{Cov}\left(-\frac{\epsilon_1}{a},\epsilon_n\right) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

(5) (a) Nous avons (pour tout t)

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X_t) &= \mathrm{Var}(aX_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}) \\ \sigma(0) &= a^2\sigma(0) + \sigma^2 + b^2\sigma^2 + 2ab\,\mathrm{Cov}(X_{t-1},\epsilon_{t-1}) \\ \sigma(0) &= a^2\sigma(0) + \sigma^2 + b^2\sigma^2 + 2ab\,\mathrm{Cov}(aX_{t-2}+\epsilon_{t-1}+\epsilon_{t-2},\epsilon_{t-1}) \\ \sigma(0) &= a^2\sigma(0) + (1+b^2)\sigma^2 + 2ab\sigma^2 \\ \sigma(0) &= \frac{(1+b^2+2ab)\sigma^2}{1-a^2}\,. \end{aligned}$$

Et aussi :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_t, X_{t-1}) &= \operatorname{Cov}(aX_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}, X_{t-1}) \\
\sigma(1) &= a\sigma(0) + b\operatorname{Cov}(\epsilon_{t-1}, X_{t-1}) \\
\sigma(1) &= a\sigma(0) + b\sigma^2 \\
\sigma(1) &= \frac{(a(1+b^2+2ab) + b(1-a^2))}{1-a^2}\sigma^2 \\
\sigma(1) &= \frac{(a+b+ab^2+a^2b)}{1-a^2}\sigma^2 \,.
\end{aligned}$$

(b) Nous avons

$$\rho(1) = \frac{\sigma(1)}{\sigma(0)} = \frac{a+b+ab^2+a^2b}{1+b^2+2ab} = \frac{(a+b)(1+ab)}{1+b^2+2ab} \,.$$

La relation de récurence pour les auto-covariances est (pour $h \geq 1$) :

$$\sigma(h+1) = a\sigma(h) \,.$$

Donc, pour tout $h \geq 1$,

$$\sigma(h) = a^{h-1}\sigma(1) \,,$$

et donc

$$\rho(h) = a^{h-1}\frac{(a+b)(1+ab)}{1+b^2+2ab} \,.$$