M1 IM, université Nice Sophia Antipolis
Séries temporelles
Sylvain Rubenthaler
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Feuille d'exercices no 4

1. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. On cherche

$$(\widehat{a}, \widehat{b}) = \arg\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} F(a,b) \text{ , avec } F(a,b) := \sum_{t=1}^{n} (x_t - a - bt)^2 \, .$$

   (a) Trouver les points critiques de F.

   Formules à savoir par cœur :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \, , \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \, .$$

   (b) Montrer que l'unique point critique est un minimum absolu de F.

2. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Soit $T \in \mathbb{R}$. Soit $\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \Delta P(X) = P(X) - P(X - T)$.

   (a) On suppose que $\deg(P) \geq 1$. Montrer que $\deg(\Delta P) \leq \deg(P) - 1$. Montrer que si $\deg(P) = 0$, alors $\Delta P = 0$.

   (b) On suppose que $\Delta^k P \neq 0$. Montrer que $\deg(P) \geq k$.

3. Les processus (X_k) suivants sont stationnaires. Le processus $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ est un bruit blanc de variance α^2 et de moyenne nulle.

   (a) Quelle est la fonction d'auto-covariance du processus auto-régressif de représentation

$$X_n - \frac{1}{2} X_{n-1} = \epsilon_n \, ?$$

   (b) On considère le processus auto-régressif de représentation

$$X_n - \frac{1}{6} X_{n-1} - \frac{1}{6} X_{n-2} = \epsilon_n \, .$$

   Donner les valeurs de $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$. Trouver les racines du polynôme $1 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}z^2$ et en déduire l'expression de $\sigma(h)$ pour $h \geq 1$.

   (c) On considère le processus auto-régressif de représentation

$$X_n - X_{n-1} + \frac{1}{2} X_{n-2} = \epsilon_n .$$

   Donner les expressions de $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$. Trouver les racines du polynôme $1 - z + \frac{1}{2}z^2$ et en déduire l'expression de $\sigma(h)$ pour $h \geq 1$.

4. Soit le processes AR_1 (centré) suivant

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t \tag{1}$$

   où ϵ_t est un bruit blanc centré de variance σ^2. On suppose $a \neq 0$.

(a) Quelle condition doit-on imposer sur a pour qu'il existe un processus stationnaire vérifiant (1) ? On suppose dans la suite que cette condition est vérifiée.

(b) Calculer la variance de ce processus.

(c) Montrer que l'auto-covariance d'un tel processus est

$$\sigma(h) = \sigma^2 \frac{a^h}{1-a^2} .$$

(d) En déduire la convergence vers 0 de l'auto-covariance lorsque $h \to +\infty$.

(e) Calculer les auto-corrélations.

(f) On suppose que $\mathbb{E}(X_0|X_1) = X_1/a$ (il n'y a pas de raison que ce soit toujours vrai). Calculer les auto-corrélations partielles.

5. Considérons le processus stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant $X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}$ (avec (ϵ_t) bruit blanc centré de variance σ^2).

(a) Montrer que $\sigma(0) = \sigma^2 \times \frac{1+b^2+2ab}{1-a^2}$, $\sigma(1) = \sigma^2 \times \frac{a+b+ab^2+a^2b}{1-a^2}$.

(b) Montrer que $\rho(1) = \frac{(a+b)(1+ab)}{b^2+2ab+1}$ et $\rho(h) = a^{h-1}\rho(1)$ pour $h \geq 1$.