M1 IM, université Nice Sophia Antipolis
Séries temporelles
Sylvain Rubenthaler
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Feuille d'exercices no 8 (révisions)

Exercice 1. Soit X un $AR(1)$ (stationnaire) défini par :

$$\forall t \in \mathbb{Z}\,,\; X_t = \phi X_{t-1} + Z_t\,,$$

avec Z un bruit blanc centré de variance σ^2 et $|\phi| < 1$. On pose :

$$\forall t \in \mathbb{Z}\,,\; Y_t = X_t - X_{t-1}\,.$$

(1) Montrer que Y est un processus stationnaire centré, puis que c'est un $ARMA(p,q)$. Préciser les valeurs de p et q et donner l'équation de récurrence vérifée par Y.

(2) Que vaut la variance de Y_t (pour tout t) ?

Exercice 2. Soit X un processus $ARMA$ (stationnaire) vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}\,,\; X_t - \frac{7}{6}X_{t-1} + \frac{1}{3}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{4}Z_{t-1} - \frac{1}{8}Z_{t-2}\,,$$

avec Z un bruit blanc (centré). Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{Z}\,,\; X_t - \frac{3}{2}X_{t-1} = Z_t + \frac{1}{4}Z_{t-1}\,.$$

Exercice 3. On étudie la série `serie1.rda` (disponible sur `http://math.unice.fr/~rubentha/enseignement/serie1.rda`, à charger dans `R` à l'aide de l'instruction `load`). Le modèle choisi pour cette série est

$$\forall t \in \{1,2,\dots,n\}\,,\; x_t = m(t) + s(t) + \epsilon_t\,, \tag{0.1}$$

où m est une tendance polynômiale, s une saisonnalité et ϵ un processus $ARMA$ (stationnaire) centré (condtui par un bruit blanc gaussien).

(1) Tracer la série `serie1.rda` et son périodogramme. Quelle est la période p de la saisonnalité s ?

(2) Estimer une tendance polynômiale et une saisonnalité de période p par moindres carrés ordinaires sur la série `serie1.rda`.

(3) Sur le résidu de cette estimation, proposer un modèle $ARMA$.

(4) Une fois identifié l'ordre du bruit $ARMA$, ajuster directement avec `arima` un modèle de type (0.1) sur `serie1.rda`. Pensez à valider votre modèle et donnez les valeurs estimées des paramètres de l'$ARMA$.

(5) Représenter l'estimation de $m + s$.

(6) En utilisant la fonction `predict`, prédire les 12 prochaines valeurs de la série `serie1.rda`.

Exercice 4. Dans cet exercice, on étudie la série `serie2.rda` (disponible sur `http://math.unice.fr/~rubentha/enseignement/serie2.rda`, à charger dans `R` à l'aide de l'instruction `load`).

(1) Tracer la série `serie2.rda`. Est-elle stationnaire ?

(2) Ajuster un modèle $ARMA$ sur cette série. Pensez à valider votre modèle.

(3) Peut-on considérer cet $ARMA$ comme étant de moyenne nulle ?

Exercice 5. La série `sncf.rda` contient le trafic mensuel sur les lignes SNCF de janvier 1963 à décembre 1980 en millions de passagers par kilomètres. Rappel : Δ_T est l'opérateur des différences avec un décalage de T.

(1) Notons X la série à étudier. Tracer la densité spectrale de X et les autocorrélations de X pour trouver la période T de la composante saisonnière de X.

(2) Notons $Y_1 = \Delta_1 X$, $Y_2 = \Delta_T X$, $Y_3 = \Delta_T \circ \Delta_1 X$. Pour chacune de ces séries $Y_{\ldots}$,

   (a) tracer les autocorrélations et les autocorrélations partielles,

   (b) en déduire un modèle $ARMA$ pour $Y_{\ldots}$ (on doit pouvoir voir le nombre de coefficients non nuls sur les graphiques précédents) et estimer les coefficients,

   (c) tracer la série des résidus et tester la blancheur des résidus.

   (On doit trouver que seul Y_3 est un $ARMA$.)

(3) Trouver, parmi les $(p, q) \in \{0, 1, 2\}^2$, le couple minimisant le critère AIC pour Y_3.

(4) Prédire le trafic de l'année 1981.