Université Nice-Sophia Antipolis
SLUMA602 - UE Analyse complexes, 2023-2024
Sylvain Rubenthaler (`https://math.unice.fr/~rubentha/`)

Corrrigé du contrôle 01 (durée 1h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sonte indépendants.

Exercice 1. Nous avons $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = e^{i\pi/3}$. Donc

$$\left\{ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n ; n \in \mathbb{N} \right\} = \{1; e^{i\pi/3}; e^{2i\pi/3}; e^{i\pi}; e^{4i\pi/3}; e^{5i\pi/3}\}\,.$$

Exercice 2.

(1) voir le cours

(2) $\frac{1}{1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc le rayon de convergence est 1/1 (par le critère de d'Alembert).

(3) $(1-z)\sum_{n\geq 0} z^n = \sum_{n\geq 0} z^n - \sum_{n\geq 1} z^{n+1} = 1$

Exercice 3.

(1) voir le cours

(2) f' est analytique sur $D(0,1)$. L'ensemble des zéros de f' a un point d'accumulation en $0 \in D(0,1)$. Donc, par principe des zéros isolés, f' est nulle sur $D(0,1)$. Donc f est constante sur $D(0,1)$.

Exercice 4.

(1) voir le cours

(2) La fonction f est bien différentiable comme fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Avec les notations habituelles :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial P}{\partial x} = 2x\,; & \frac{\partial P}{\partial y} = -2y\,; \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\,; & \frac{\partial Q}{\partial y} = 2x\,. \end{array}$$

Donc f vérifie les équations de Cauchy-Riemann, donc f est holomorphe.

Exercice 5. Nous regardons la différentielle de $f\circ g$ (en z) :

$$\begin{array}{rcl} D(f\circ g)(z) & = & Df(g(z))\circ Dg(z) \\ & = & \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))d\overline{z}\right)\circ\left(\frac{\partial g}{\partial z}(z)dz\right) \\ & = & \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\overline{\frac{\partial g}{\partial z}(z)}d\overline{z}\circ dz \\ & = & \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\overline{\frac{\partial g}{\partial z}(z)}d\overline{z}\,. \end{array}$$

Donc $f\circ g$ est anti-holomorphe.