Université Nice-Sophia Antipolis
SLUMA602 - UE Analyse complexes, 2023-2024
Sylvain Rubenthaler (`https://math.unice.fr/~rubentha/`)

Contrôle 01 (durée 1h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Calculer les nombres complexes $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$ pour n dans $\mathbb{N}$ et les représenter dans le plan.

Exercice 2.

(1) Énoncer un critère de calcul du rayon de convergence d'une série entière.

(2) Calculer le rayon de convergence de la série $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$. Dans son rayon de convergence, calculer $(1-z)f(z)$.

Exercice 3.

(1) Rappeler le principe des zéros isolés pour les fonctions analytiques.

(2) Soit f une fonction analytique sur le disque $D(0,1)$ telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $f'\left(\frac{1}{n^2}\right) = f'\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 0$. Montrer que f est constante.

Exercice 4.

(1) Rappeler la caractérisation de l'holomorphicité en termes des équations de Cauchy-Riemann.

(2) Soit $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ (pour $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$). Est-ce que f est holomorphe ? (On pourra admettre que f admet une différentielle en tout point.)

Exercice 5. Soit f une fonction anti-holomorphe et soit g une fonction holomorphe. Montrer que $f \circ g$ est anti-holomorphe.