

Séries temporelles, corrigé du contrôle no 2, sujet B

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Rendre l'énoncé avec la copie rapporte 0,5 point sur 20.

Exercice 1.

(1) Le polynôme associé à l'équation est

$$\begin{aligned} A(X) &= 1 - \frac{1}{4}X - \frac{1}{8}X^2 \\ &= \left(1 - \frac{X}{2}\right) \left(1 + \frac{X}{4}\right) \end{aligned}$$

de racines $\{2; -4\}$ qui sont de module > 1 . Donc l'équation admet une solution stationnaire.

(2)

$$(\text{Id} - (1/4)L - (1/8)L^2)(X)_t = X_t - (1/4)X_{t-1} - (1/8)X_{t-2} = \epsilon_t$$

(3)

(a) Le terme constant de la série est ψ_0 donc $\psi_0 = 1$. Le terme en z de la série est $\psi_1 - 1/4$ donc $\psi_1 = 1/4$.

(b) Pour $k \geq 2$, le terme en z^k de la série est $\psi_k - (1/4)\psi_{k-1} - (1/8)\psi_{k-2}$. Donc nous avons la relation

$$\psi_k = \frac{1}{4}\psi_{k-1} + \frac{1}{8}\psi_{k-2}.$$

(c) Le polynôme associé à la relation ci-dessus est

$$\begin{aligned} P(X) &= X^2 - (1/4)X - (1/8) \\ &= \left(X + \frac{1}{4}\right) \left(X - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

qui a pour racines $-\{1/4; 1/2\}$. La forme générale de la solution est donc $\psi_k = \alpha(-1/4)^k + \beta(1/2)^k$, avec deux constantes α, β que nous déterminons en regardant ψ_0, ψ_1 :

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ -\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} &= \frac{1}{4} \end{cases}$$

Nous avons donc $\beta = 1 - \alpha$,

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{4} + \frac{1-\alpha}{2} &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} &= \frac{3\alpha}{4} \\ \alpha &= \frac{1}{3} \\ \beta &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(4) Nous avons (puisque les ϵ_t sont indépendants)

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_t) &= \sum_{k \geq 0} \psi_k^2 \\
 &= \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4} \right)^k + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^k \right)^2 \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{9} \left(\frac{1}{4} \right)^{2k} + \frac{4}{9} \left(\frac{1}{2} \right)^{2k} + \frac{8}{9} \left(-\frac{1}{8} \right)^k \\
 \text{(séries géométriques)} &= \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{4}{9} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{8}{9} \frac{1}{1 + \frac{1}{8}} \\
 &= \frac{16}{135} + \frac{16}{27} + \frac{64}{81}.
 \end{aligned}$$

Exercice 2.

- (1) La moyenne de la série varie donc la série n'est pas stationnaire.
- (2) Les auto-corrélations sont (vaguement) constante. Donc la série n'a pas de composante périodique.
- (3) Dans xw , nous avons les prix de la semaine 1 à la semaine 160.
- (4) La p -valeur est plus grande que 0,01 donc nous gardons (H_0) et nous concluons que la série y n'est pas stationnaire.
- (5) La p -valeur est plus petite que 0,01 donc nous rejetons (H_0) et nous concluons que la série z est stationnaire.
- (6) Nous interprétons les graphes de la manière suivante : les ACF sont nulles après le rang 1 et les PACF tendent vers 0. Le processus z serait donc un MA(1). La série xw est alors un ARIMA(0,2,1).
- (7) Les lignes de programme estiment les paramètres comme si xw était un ARIMA(0,2,1), puis on teste si les résidus forment un bruit blanc (test de Box-Pierce). Nous décidons que nous voulons un niveau d'erreur de 5%. La p -valeur est plus grande que 0,05 donc nous concluons que les résidus forment un bruit blanc et que donc notre modèle ARIMA(0,2,1) est valide.
- (8) La quantité `pred$se` est l'écart-type de l'erreur de prédiction. Il donc choisir a tel que (avec Z v.a. de loi $\mathcal{N}(0;1)$) $\mathbb{P}(Z > a) \leq 0,06$ (mais pas beaucoup plus petit). D'après la table, il faut donc prendre $a = 1,56$.