M1 IM, université Nice Sophia Antipolis
Séries temporelles
Sylvain Rubenthaler
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Complément de cours no 1

Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc centré de variance σ^2. On cherche à construire un processus stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant $(\forall t \geq 0)$

$$X_{t+1} = \epsilon_{t+1} + \sum_{k=1}^{p} a_k X_{t+1-k} \,. \tag{1}$$

(On suppose que les racines de $A[X] = 1 - \sum_{k=1}^{p} a_k X^k$ sont toutes de module > 1.) Nous avons montré en cours qu'on écrire le développement suivant

$$\frac{1}{A(z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k z^k$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et avec des $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_0 = 1$, $\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty$. Nous voulons montrer que

$$X_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \epsilon_{t-k}$$

vérifie (1) (nous avons montré en cours que cette variable est bien définie). Calculons $(\forall t \geq p)$:

$$\begin{aligned}
\epsilon_t + \sum_{k=1}^{p} a_k X_{t-k} &= \epsilon_t + \sum_{k=1}^{p} a_k \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \epsilon_{t-k-j} \right) \\
(\text{ avec } i = j+k) \quad &= \epsilon_t + \sum_{i=1}^{+\infty} \epsilon_{t-i} \left(\sum_{k=1}^{\inf(i,p)} a_k \alpha_{i-k} \right) \,.
\end{aligned}$$

Nous avons $(\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1)$

$$(1 - a_1 z - \dots - a_p z^p) \times (1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots) = 1 \,.$$

Le coefficient de z^n dans le terme de gauche ci-dessus est $\alpha_n - \big(\alpha_{n-1}a_1 + \dots + \alpha_{n-\inf(n,p)} a_{\inf(n,p)}\big)$, donc

$$\alpha_n a_0 + \alpha_{n-1} a_1 + \dots + \alpha_{n-\inf(n,p)} a_{\inf(n,p)} = 0 \,,\ \forall n \geq 1 \,.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\epsilon_t + \sum_{k=1}^{p} a_k X_{t-k} &= \epsilon_t + \sum_{i=1}^{+\infty} \epsilon_{t-i} \alpha_i \\
&= X_t \,.
\end{aligned}$$