CORRIGÉS POUR LE CHAPITRE 2

Exercice 2. La loi uniforme sur $[-1;1]$ est de densité

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\mathbb{1}_{[-1;1]^2}(x)}{4}\,. \end{array}$$

La loi uniforme sur le disque D de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\mathbb{1}_{D}(x)}{\pi}\,. \end{array}$$

Nous avons, pour tout x,

$$f(x) \leq \frac{4}{\pi} g(x)\,. \tag{0.1}$$

L'algorithme de rejet basé sur l'inégalité ci-dessus (0.1) pour simuler une variable de densité f consiste à tirer des variables X_i i.i.d. de loi uniforme sur $[-1;1]^2$ et des variables W_i i.i.d. de loi uniforme sur $[0;1]$ jusqu'à ce que

$$W_i \leq \frac{f(X_i)}{(4/\pi)g(X_i)}\,. \tag{0.2}$$

On remarque que l'inégalité ci-dessus (0.2) est équivalente à

$$W_i \times \frac{4}{\pi} \times \frac{\mathbb{1}_{[-1;1]^2}(X_i)}{4} \leq \frac{\mathbb{1}_D(X_i)}{\pi}\,.$$

Puisque $D \subset [-1;1]^2$ et que $X_i \in [-1;1]^2$, ceci est équivalent à

$$X_i \in D\,.$$

Donc l'algorithme proposé est en fait l'algorithme de rejet basé sur (0.1) pour simuler une variable de densité f. Donc la variable renvoyée est de densité f.

Exercice 3. D'après l'exercice précédent, les couple (U,V) qui sort de la boucle [tant que] est de loi uniforme sur le disque de centre 0 et de rayon 1 (que nous noterons D).

Nous prenons maintenant φ dans $\mathcal{C}_b^+(\mathbb{R}^2)$ et nous calculons

$$\mathbb{E}(\varphi(ZU,ZV)) = \int_{(u,v)\in D} \varphi\left(\left(\frac{-2\log(u^2+v^2)}{u^2+v^2}\right)^{1/2} u, \left(\frac{-2\log(u^2+v^2)}{u^2+v^2}\right)^{1/2} v\right) \frac{1}{\pi} du dv\,.$$

Changement de variable : $u = r\cos(\theta)$, $v = r\sin(\theta)$ ($r \in [0;1]$, $v \in [0;2\pi[$). La matrice jacobienne est

$$J_1(u,v) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix},$$

de déterminant $r\cos^2(\theta)+r\sin^2(\theta)=r$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(ZU,ZV)) &= \int_{r\in[0;1],\theta\in[0;2\pi[}\varphi\left(\left(\frac{-2\log(r^2)}{r^2}\right)^{1/2}r\cos(\theta),\left(\frac{-2\log(r^2)}{r^2}\right)^{1/2}r\sin(\theta)\right)\frac{r}{\pi}drd\theta\\ &= \int_{r\in[0;1],\theta\in[0;2\pi[}\varphi((-2\log(r^2))^{1/2}\cos(\theta),(-2\log(r^2))^{1/2}\sin(\theta))rdrd\theta\,.\end{aligned}$$

Changement de variable : $r=\sqrt{x}$, $\theta=2\pi t$ ($x\in[0;1]$, $t\in[0;1]$). La matrice jacobienne est

$$J_2(r,\theta)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{x}} & 0\\ 0 & 2\pi\end{bmatrix},$$

de déterminant $\pi/\sqrt{x}$. Donc

$$\mathbb{E}(\varphi(ZU,ZV)) = \int_{x\in[0;1],t\in[0;1[}\varphi((-2\log(x))^{1/2}\cos(2\pi t),(-2\log(x))^{1/2}\sin(2\pi t))dxdt\,.$$

D'après le cours (algorithme de Box-Müller), nous savons alors que (ZU,ZV) est une gaussienne de matrice de covariance identité.

Exercice 4.

(1) Les variables X, Y sont indépendantes et de loi $\mathcal{E}(1)$, donc (X,Y) a pour densité

$$(x,y)\mapsto \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)e^{-x}\times\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(y)e^{-y}\,.$$

Soit $\varphi\in C_b^+(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(X)\mathbb{1}_{2Y>(1-X)^2}) &= \int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x)\mathbb{1}_{2y>(1-x)^2}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)e^{-x}\times\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(y)e^{-y}dxdy\\ &= \int_{[0;+\infty[}\varphi(x)\left(\int_{[0;+\infty[}\mathbb{1}_{2y>(1-x)^2}e^{-y}dy\right)e^{-x}dx\\ &= \int_{[0;+\infty[}\varphi(x)\left(\int_{\frac{(1-x)^2}{2}}^{+\infty}e^{-y}dy\right)e^{-x}dx\\ &= \int_{[0;+\infty[}\varphi(x)(e^{-(1-x)^2/2})e^{-x}dx\\ &= \int_{[0;+\infty[}\varphi(x)\exp\left(-\frac{(1+x^2)}{2}\right)dx\,.\end{aligned}$$

En particulier

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{2Y>(1-X)^2}) &= \int_{[0;+\infty[}\exp\left(-\frac{(1+x^2)}{2}\right)dx\\ &= e^{-1/2}\sqrt{2\pi}\int_{[0;+\infty[}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx\\ &= e^{-1/2}\sqrt{2\pi}\times\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\mathbb{E}(\varphi(X)\mathbb{1}_{2Y>(1-X)^2})}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{2Y>(1-X)^2})} = \int_{[0;+\infty[}\varphi(x)\frac{2e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx\,.$$

Donc la loi conditionnelle de X sachant $2Y > (1-X)^2$ a bien la densité annoncée.

(2) Soit $\varphi \in C_b^+(\mathbb{R})$, puisque S est indépendant de X et Y, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi((2S-1)X)\mathbb{1}_{2Y>(1-X)^2}) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(\varphi(X)\mathbb{1}_{2Y>(1-X)^2}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(\varphi(-X)\mathbb{1}_{2Y>(1-X)^2}) \\
\text{(par question précédente)} &= \frac{1}{2}\int_{[0;+\infty[} \varphi(x)\exp\left(-\frac{(1+x^2)}{2}\right)dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{[0;+\infty[} \varphi(-x)\exp\left(-\frac{(1+x^2)}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\exp\left(-\frac{(1+x^2)}{2}\right)dx\,.
\end{aligned}$$

Donc (en utilisant les résultats ci-dessus)

$$\frac{\mathbb{E}(\varphi((2S-1)X)\mathbb{1}_{2Y>(1-X)^2})}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{2Y>(1-X)^2})} = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx\,.$$

Donc la loi conditionnelle de $(2S-1)X$ sachant $2Y > (1-X)^2$ est $\mathcal{N}(0,1)$.

(3) Voir le programme proposé. Montrons que ce programme simule bien ce que nous voulons. Nous tirons S_i, X_i, Y_i (respectivement de lois $\mathcal{B}(1/2)$, $\mathcal{E}(1)$, $\mathcal{E}(1)$) jusqu'à ce que $2Y_i > (1-X_i)^2$.

Soit g la densité de (S_i, X_i, Y_i) (qui ne dépend pas de i) par rapport à la mesure $(\delta_0+\delta_1)\times\lambda\times\lambda$ (λ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). Soit f la densité de (S_i, X_i, Y_i) conditionnellement à $2Y > (1-X)^2$. Nous avons

$$f(s,x,y) = \frac{g(s,x,y)}{\mathbb{P}(2Y > (1-X)^2)} \times \mathbb{1}_{2y>(1-x)^2}\,.$$

En particulier

$$f \leq \frac{1}{\mathbb{P}(2Y > (1-X)^2)} g\,.$$

Nous noterons $k = 1/\mathbb{P}(2Y > (1-X)^2)$. Quel est l'algorithme de rejet qui nous permettrait de simuler suivant la loi conditionnelle voulue ? Soit (W_i) les variables i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0;1])$ utilisées dans l'algorithme de rejet. La condition d'arrêt dans la méthode du rejet est

$$W_i \leq \frac{f(S, X_i, Y_i)}{kg(S_i, X_i, Y_i)}\,,$$

c'est à dire

$$W_i \times g(S_i, X_i, Y_i) \leq g(S_i, X_i, Y_i)\mathbb{1}_{2Y_i>(1-X_i)^2}\,,$$

ce qui est équivalent à $2Y_i > (1-X_i)^2$. Donc l'algorithme proposé dans le programme est un algorithme de rejet et c'est pour cela que nous simulons bien suivant la loi voulue.

Exercice 5. Calcul de VaR.

(1) Nous avons

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{]-\infty;t]}(X_n)\,.$$

Donc, par la loi des grands nombres, $F_n(t) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{]-\infty;t]}(X)) = \mathbb{P}(X \leq t) = F(t)$.

(2) Soit $\epsilon > 0$. Soit $\delta = \inf(F(-x+\epsilon) - F(-x), F(-x) - F(-x-\epsilon)$. Nous avons $\delta > 0$ car F est strictement croissante. Nous avons

$$\begin{aligned} F_n(-x-\epsilon) & \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} & F(-x-\epsilon)\,, \\ F_n(-x+\epsilon) & \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} & F(-x+\epsilon)\,. \end{aligned}$$

Donc, presque sûrement, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} F_n(-x-\epsilon) & \leq & F(-x-\epsilon) + \frac{\delta}{4} \leq F(-x) - \delta + \frac{\delta}{4} = p - \frac{3\delta}{4}\,, \\ F_n(-x+\epsilon) & \geq & F(-x+\epsilon) - \frac{\delta}{4} \geq F(-x) + \delta - \frac{\delta}{4} = p + \frac{3\delta}{4}\,, \\ \frac{1}{n} & \leq & \frac{\delta}{4}\,. \end{aligned}$$

Nous remarquons que, p.s., les $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont deux à deux distincts et que donc la fonction F_n est constante par morceaux et a des sauts qui sont tous de taille $1/n$. Donc il existe t dans $[-x-\epsilon; -x+\epsilon]$ tel que $F_n(t) \leq p$. Comme $F_n(-x+\epsilon) > p$, ceci implique que Z_n est dans $[x-\epsilon; x+\epsilon]$. D'où le résultat.

Exercice 6. On se donne $(X_i, Y_i, U_i, V_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. avec X_1, Y_1, U_1, V_1 indépendants, X_1 de loi de densité f, Y_1 de loi de densité g, $U, V \sim \mathcal{U}([0;1])$. Notons pour tout i, $A_i = \{U_i f(X_i) \leq g(X_i)\} \cup \{V_i g(X_i) \leq f(Y_i), U_i f(X_i) > g(X_i)\}$ (A_i est un événement) et $T(\omega) = \inf\{i : \omega \in A_i\}$.

Pour toute fonction $\phi \in C_b^+(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\phi(Z)) & = & \sum_{i\geq 1} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{i=T}(\phi(Y_i)\mathbb{1}_{U_i f(X_i)\leq g(X_i)} + \phi(X_i)\mathbb{1}_{V_i g(Y_i)\leq f(Y_i)}\mathbb{1}_{U_i f(X_i)>g(X_i)})\right) \\ & = & \sum_{i\geq 1} \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{A_1^c}\dots\mathbb{1}_{A_{i-1}^c}\mathbb{1}_{A_i}(\phi(Y_i)\mathbb{1}_{U_i f(X_i)\leq g(X_i)} \\ & & +\phi(X_i)\mathbb{1}_{V_i g(Y_i)\leq f(Y_i)}\mathbb{1}_{U_i f(X_i)>g(X_i)})\Big) \\ \text{(par indépendance)} & = & \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A_1^c)^{i-1}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_i}(\phi(Y_i)\mathbb{1}_{U_i f(X_i)\leq g(X_i)} + \phi(X_i)\mathbb{1}_{V_i g(Y_i)\leq f(Y_i)}\mathbb{1}_{U_i f(X_i)>g(X_i)})\right) \\ & = & \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A_1^c)^{i-1}\mathbb{E}\left(\phi(Y_i)\mathbb{1}_{U_i f(X_i)\leq g(X_i)} + \phi(X_i)\mathbb{1}_{V_i g(Y_i)\leq f(Y_i)}\mathbb{1}_{U_i f(X_i)>g(X_i)}\right)\,. \end{aligned}$$

Calculons

$$\mathbb{E}\left(\phi(Y_i)\mathbb{1}_{U_i g(X_i)\leq g(X_i)} + \phi(X_i)\mathbb{1}_{V_i g(Y_i)\leq f(Y_i)}\mathbb{1}_{U_i f(X_i)>g(X_i)}\right) =$$
$$\int_{x,y\in\mathbb{R}}\int_{u,v\in[0;1]} \left(\phi(y)\mathbb{1}_{uf(x)\leq g(x)} + \phi(x)\mathbb{1}_{vg(y)\leq f(y)}\mathbb{1}_{uf(x)>g(x)}\right) f(x)g(y)dudvdxdy$$

On va utiliser les résultats suivants.

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a+b-a\wedge b = a\vee b$. (Rappel : $a\vee b = \max(a,b)$, $a\wedge b = \min(a,b)$.)
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 \mathbb{1}_{uf(x)\leq g(x)} du = \frac{(f\wedge g)(x)}{f(x)}$, $\int_0^1 \mathbb{1}_{uf(x)>g(x)} du = 1 - \frac{(f\wedge g)(x)}{f(x)}$

La quantité ci-dessus est alors égale à

$$\begin{aligned}
&\int_{x,y\in\mathbb{R}} \phi(y)\frac{(g\wedge f)(x)}{f(x)} f(x)g(y) + \phi(x)\left(1-\frac{(g\wedge f)(x)}{f(x)}\right)\frac{(g\wedge f)(y)}{g(y)} f(x)g(y)dydx =\\
&\int_{x,y\in\mathbb{R}} \phi(y)(g\wedge f)(x)g(y) + \phi(x)\left(f(x)(g\wedge f)(y) - (g\wedge f)(x)(g\wedge f)(y)\right)dxdy =\\
&\int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)g(y)dy \times \int_{x\in\mathbb{R}} (g\wedge f)(x)dx + \int_{x\in\mathbb{R}} \phi(x)f(x)dx \times \int_{y\in\mathbb{R}} (g\wedge f)(y)dy\\
&\qquad - \int_{x\in\mathbb{R}} \phi(x)(g\wedge f)(x)dx \times \int_{y\in\mathbb{R}} (g\wedge f)(y)dy =\\
&\qquad \int_{x\in\mathbb{R}} \phi(x)(f\vee g)(x)dx \times \int_{y\in\mathbb{R}} (g\wedge f)(y)dy\,.
\end{aligned}$$

En prenant ϕ constante égale à 1, on trouve

$$\mathbb{P}(A_1) = \int_{x\in\mathbb{R}} (f\vee g)(x)dx \times \int_{y\in\mathbb{R}} (g\wedge f)(y)dy\,.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(Z)) &= \frac{\int_{x\in\mathbb{R}} \phi(x)(f\vee g)(x)dx \times \int_{y\in\mathbb{R}}(g\wedge f)(y)dy}{1-\mathbb{P}(A_1^c)}\\
&= \frac{\int_{x\in\mathbb{R}} \phi(x)(f\vee g)(x)dx}{\int_{x\in\mathbb{R}}(f\vee g)(x)dx}\,.
\end{aligned}$$

Donc Z est de densité

$$x\in\mathbb{R} \mapsto \frac{(f\vee g)(x)}{\int_{y\in\mathbb{R}}(f\vee g)(y)dy}\,.$$

Exercice 7.

(1) On étudie la fonction $h : x\in\mathbb{R}^+ \mapsto \exp(-x^2/2+\lambda x)$. Nous avons

$$h'(x) = (-x+\lambda)h(x)\,,$$

d'où le tableau de variation de la table 1. Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$,

$$h(x) \leq e^{\lambda^2/2}\,,$$

et donc

$$f(x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\lambda^2/2}\frac{1}{\lambda} \times \lambda e^{-\lambda x}\,.$$

Avec

$$c_\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\lambda^2/2}\frac{1}{\lambda}\,,$$

nous avons

$$f(x) \leq c_\lambda \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$$

pour tout x.

(2) On peut donc simuler f avec un algorithme de rejet (puisqu'il est facile de simuler suivant la densité $x\in\mathbb{R}\mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$.

x	0		λ		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	-	
$h(x)$		$\nearrow$	$\exp(\lambda^2/2)$	$\searrow$	

TABLE 1. Tableau de variation de h.

λ	0		1		$+\infty$
$c'(\lambda)$		-	0	$+$	
$c(\lambda)$		$\searrow$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{1/2}$	$\nearrow$	

TABLE 2. Tableau de variation de c.

(3) Nous avons vu en cours que l'espérance du temps de calcul est proportionnelle à c_λ. Nous avons donc intérêt a choisir λ tel que c_λ soit la plus petite possible. Posons

$$c\,:\,\lambda\in\mathbb{R}^+\mapsto\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\lambda^2/2}\frac{1}{\lambda}\,.$$

Nous avons

$$c'(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{1}{\lambda^2}+1\right)e^{\lambda^2/2}\,,$$

d'où le tableau de variation de c dans la table 2. Le meilleur choix en terme de temps de calcul est donc : $\lambda=1$.

Exercice 8.

(1) On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{-x}dx &= [-e^{-x}]_0^a\\ &= 1-e^{-a}\,.\end{aligned}$$

On prend donc $C=(1-e^{-a})^{-1}$.

(2) Pour tout $x\in[0;a]$, $e^{-x}\leq 1$. Donc nous pouvons prendre

$$c_1=aC\,.$$

(3) Pour tout $x\geq 0$, $\mathbb{1}_{[0;a]}(x)\leq\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$. Donc nous pouvons prendre

$$c_2=C\,.$$

(4) La loi uniforme sur $[0;a]$ a pour densité

$$x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{\mathbb{1}_{[0;a]}(x)}{a}\,.$$

La loi exponentielle de paramètre 1 a pour densité

$$x\in\mathbb{R}\mapsto\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)e^{-x}\,.$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$Cf(x)\leq aC\times\frac{\mathbb{1}_{[0;a]}(x)}{a}\tag{0.3}$$

et on a égalité pour $x=0$ (donc on ne trouvera pas plus petite constante C' telle que $Cf(x)\leq C'\times\mathbb{1}_{[0;a]}(x)/a$). La méthode de rejet pour simuler suivant la densité Cf (en proposant des variables de loi uniforme sur $[0;a]$) basée sur l'inégalité (0.3) effectue en moyenne aC opérations.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Cf(x) \leq C \times \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)e^{-x} \tag{0.4}$$

et on a égalité pour $x = 0$ (donc on ne trouvera pas plus petite constante C' telle que $Cf(x) \leq C' \times \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)e^{-x}$). La méthode de rejet pour simuler suivant la densité Cf (en proposant des variables de loi uniforme sur $[0;a]$) basée sur l'inégalité (0.4) effectue en moyenne C opérations.

Si $a \leq 1$, on choisira donc la méthode basée sur (0.3) et si $a > 1$, on choisira la méthode basée sur (0.4).

Exercice 9.

(1) Prenons $g(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$ (la densité de la loi exponentielle). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^{-x^2}\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)}{Z} \leq \frac{e^{-x}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)}{Z}\,.$$

On prend donc $C = 1/Z$.

(2) Soit $\varphi \in C_b^+(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)|X \geq 1) = \frac{\mathbb{E}(\varphi(X)\mathbb{1}_{X\geq 1})}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X\geq 1})}\,.$$

Calculons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(X)\mathbb{1}_{X\geq 1}) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\times\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2}}}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)\frac{\exp\left(-x^2\right)}{\sqrt{\pi}}dx\,.\end{aligned}$$

Donc (le calcul ci-dessus étant vrai aussi pour $\varphi \equiv 1$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(X)|X \geq 1) &= \frac{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)\frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}}dx}{(Z/\sqrt{\pi})} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)f(x)dx\,.\end{aligned}$$

Donc f est la densité de X sachant $X \geq 1$.

Exercice 10. Pour $x > 0$,

$$F'(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}\exp(-\alpha x^{\beta})\,.$$

La densité est donc

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\,, \\ \alpha\beta x^{\beta-1}\exp(-\alpha x^{\beta}) & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

On cherche ensuite le pseudo-inverse de F. Si $u \in [0;1]$, on cherche x tel que $F(x) = u$. Ce qui revient à

$$x = \left(-\frac{1}{\alpha}\log(1-u)\right)^{\frac{1}{\beta}}\,.$$

Pour simuler suivant la loi de X, on tire $U \sim \mathcal{U}([0;1])$ et on renvoie

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\log(1-U)\right)^{\frac{1}{\beta}} .$$

Exercice 11.

(1) Si on tire U_1, U_2, $\dots$ i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $Y = \inf\{i : U_i = 1\}$ est de loi $\mathcal{G}(p)$. En effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=k) &= \mathbb{P}(U_1 = 0, \dots, U_{k-1} = 0, U_k = 1) \\
\text{(par indépendance des } U_i\text{)} &= \mathbb{P}(U_1 = 0)\dots\mathbb{P}(U_{k-1} = 0)\mathbb{P}(U_k = 1) \\
&= (1-p)^{k-1}p\,.
\end{aligned}$$

(2) Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq k) &= \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1} \\
\text{(somme géométrique)} &= p \times \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \\
&= 1-(1-p)^k\,.
\end{aligned}$$

Et si $t \in [k; k+1[$,

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq k)\,.$$

La fonction de répartition de X est donc

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1\,, \\ 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor} & \text{si } t \geq 1\,. \end{cases}$$

Exercice 11.

(1) Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$. Nous remarquons que, pour tout σ dans $\mathcal{S}_n$, $(U_1, \dots, U_n)$ et $(U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(n)})$ ont même loi. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_b^+(\mathbb{R})$. Par définition de la statistique d'ordre, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(V_1, \dots, V_n)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{1}_{C_n}(U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(n)})\varphi(U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(n)})\right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{C_n}(U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(n)})\varphi(U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(n)})) \\
\text{(voir remarque ci-dessus)} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{C_n}(U_1, \dots, U_n)\varphi(U_1, \dots, U_n)) \\
\text{(car } \#\mathcal{S}_n = n!\text{)} &= \mathbb{E}(n!\mathbb{1}_{C_n}(U_1, \dots, U_n)\varphi(U_1, \dots, U_n))\,.
\end{aligned}$$

Donc la densité de $(V_1, \dots, V_n)$ est

$$(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto n! \times \mathbb{1}_{C_n}(v_1, \dots, v_n)\,.$$

(2) Posons $T_1 = X_1$, $T_2 = X_1 + X_2$, ..., $T_{n+1} = X_1 + \dots + X_{n+1}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_b^+(\mathbb{R})$. Nous avons :

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{X_1}{X_1+\dots+X_{n+1}}, \dots, \frac{X_1+\dots+X_n}{X_1+\dots+X_{n+1}}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\varphi\left(\frac{T_1}{T_{n+1}}, \frac{T_2}{T_{n+1}}, \dots, \frac{T_n}{T_{n+1}}\right)\right) \tag{0.5}$$

$$= \int_{t_1 \geq 0}\int_{t_2 \geq t_1} \dots \int_{t_{n+1} \geq t_n} \varphi\left(\frac{t_1}{t_{n+1}}, \dots, \frac{t_n}{t_{n+1}}\right) e^{-t_1} e^{-(t_2-t_1)} \dots e^{-(t_{n+1}-t_n)} dt_1 \dots dt_{n+1}\,.$$

Changement de variable

$$\psi\,:\,(t_1, \dots, t_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} \text{ tel que } t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+1} \mapsto \left(\frac{t_1}{t_{n+1}}, \dots, \frac{t_n}{t_{n+1}}, t_{n+1}\right) \in C_n \times \mathbb{R}^+\,.$$

Lors d'un contrôle, il faut vérifier que ψ est bijective, C^1 et que ψ^{-1} est C^1. Nous sautons cette étape facile. Calculons l'inverse de ψ. Pour $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1}$, nous posons

$$v_1 = \frac{t_1}{t_{n+1}}\,,\ v_2 = \frac{t_2}{t_{n+1}}\,,\ \dots\,,\ v_n = \frac{t_n}{t_{n+1}}\,,\ v_{n+1} = t_{n+1}\,.$$

D'où

$$t_1 = v_1 v_{n+1}\,,\ t_2 = v_2 v_{n+1}\,,\ \dots\,,\ t_n = v_n v_{n+1}\,,\ t_{n+1} = v_{n+1}\,.$$

Nous calculons maintenant les dérivées des t_i en fonction des v_i et nous obtenons la matrice jacobienne suivante

$$J = \begin{bmatrix} v_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{n+1} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v_{n+1} & 0 \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} & v_n & 1 \end{bmatrix},$$

de déterminant $(v_{n+1})^n$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
(0.5) \quad &= \int_{C_n \times \mathbb{R}^+} \varphi(v_1, \dots, v_n) \\
&\qquad \times e^{-v_1 v_{n+1} - (v_1 - v_2) v_{n+1} - \dots - (v_n - v_{n-1}) v_{n+1} - (v_{n+1} - v_n v_{n+1})} |v_{n+1}|^n dv_1 \dots dv_{n+1} \\
&= \int_{C_n \times \mathbb{R}^+} \varphi(v_1, \dots, v_n) e^{-v_{n+1}} v_{n+1}^n dv_1 \dots dv_{n+1} \\
&= \int_{C_n} \varphi(v_1, \dots, v_n) dv_1 \dots dv_n \times \int_{\mathbb{R}^+} e^{-v_{n+1}} v_{n+1}^n dv_{n+1} \\
\text{(voir partie 2.4 du poly.)} \quad &= n! \int_{C_n} \varphi(v_1, \dots, v_n) dv_1 \dots dv_n\,.
\end{aligned}$$

Ceci est vrai pour φ quelconque dans $\mathcal{C}_b^+(\mathbb{R})$. Donc le résultat voulu est démontré.