Corrigé : Dérivées et intégrales (2)

Exercice 1 :

• $f(x) = (x^3 - 2x + 1)^3$ $\quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3(x^3 - 2x + 1)^2 (3x^2 - 2)$ sur $\mathbb{R}$.

• $f(x) = \sqrt{1 - 5x^2}$ $\quad \mathcal{D}_f = \{x \mid 1 - 5x^2 \geq 0\} = \{x \mid (1-\sqrt{5}x)(1+\sqrt{5}x) \geq 0\}$

$\mathcal{D}_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$

Sur $\left]-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right[$, $f'(x) = \dfrac{-10x}{2\sqrt{1-5x^2}} = \dfrac{-5x}{\sqrt{1-5x^2}}$

• $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ $\quad \mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1 \geq 0 \text{ et } x+3 > 0) \text{ ou } (x-1 \leq 0 \text{ et } x+3 < 0)\}$

$\mathcal{D}_f =]-\infty, -3[\cup [1, +\infty[$

Sur $]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$ $\quad f'(x) = \dfrac{\left(\frac{x-1}{x+3}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}} = \dfrac{\frac{(x+3)-(x-1)}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}}$

$f'(x) = \dfrac{4}{2(x+3)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}}$

• $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}$ $\quad \mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ et } x+3 > 0\}$

$= [2, +\infty[$

Sur $]2, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x-2})'(\sqrt{x+3}) - \sqrt{x-2}(\sqrt{x+3})'}{(\sqrt{x+3})^2}$

$= \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\sqrt{x+3} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}}\sqrt{x-2}}{(x+3)}$

$= \dfrac{(x+3)-(x-2)}{2\sqrt{x-2}\sqrt{x+3}(x+3)} = \dfrac{5}{2\sqrt{x-2}(x+3)^{3/2}}$

$\bullet$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}$ $\quad D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

car alors pour x de $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$\sqrt{x^2-1}+x \neq 0$

$$f'(x) = -\frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)'}{2\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1}{2\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}$$

$$f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{(x^2-1)}\,\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)} \quad \text{sur } D_f$$

$\bullet$ $f(x) = \sqrt{x^2-1} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x^2-1-x}{\sqrt{x^2-1}} \qquad f'(x) = \frac{(2x-1)\sqrt{x^2-1} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}(x^2-x-1)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2-1) - x(x^2-x-1)}{\sqrt{x^2-1}\,(x^2-1)} = \frac{x^3+1-x}{(x^2-1)^{3/2}}$$

$\bullet$ $f(x) = \dfrac{(x-3)^4}{(x+2)^6}$ $\quad D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{4(x-3)^3(x+2)^6 - 6(x+2)^5(x-3)^4}{(x+2)^{12}} = \frac{(x-3)^3(x+2)^5\left[4(x+2) - 6(x-3)\right]}{(x+2)^{12}}$$

$$f'(x) = \frac{(x-3)^3\,(26-2x)}{(x+2)^7} = \frac{2(x-3)^3(13-x)}{(x+2)^7} \quad \text{sur } D_f.$$

Exercice 2 : $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$

1) $\mathcal{D}_f =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x(1+1/x^2)} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{6}{x(1+1/x^2)} = 0$$

2)

$$f'(x) = \frac{6(x^2+1) - (6x)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6 - 6x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{6(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

$f(-1) = -3$

$f(1) = 3$

3) Tangente à C_f en $(0, 0)$: $f'(0) = 6$ $f(0) = 0$

$$y - 0 = 6(x - 0) \quad \boxed{y = 6x} \quad (T)$$

4/ Etude de la position relative de C et de (T)

on pose

$$g(x) = \frac{6x}{x^2+1} - 6x = \frac{6x - 6x(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{-6x^3}{x^2+1}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

donc pour $x \in]-\infty, 0]$ $g(x) \geq 0$ càd C est au dessus de (T).

pour $x \in [0, +\infty[$ $g(x) \leq 0$ càd C est au-dessous de (T).

Exercice 3 : $f(x) = x^2 - 3x - 1$

1) Equation de la tangente à C_f au point $A(a, f(a))$

$f'(x) = 2x - 3 \qquad f'(a) = 2a - 3$

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

cad $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ ou $y = (2a-3)(x-a) + (a^2 - 3a - 1)$

$y = (2a-3)x - a(2a-3) + a^2 - 3a - 1$

$y = (2a-3)x - a^2 - 1$.

2) La tangente à C_f en A et la droite d'équation $y = x$ sont parallèles ssi les coefficients directeurs (ou pentes) de ces 2 droites sont égaux cad si $2a - 3 = 1$ cad $a = 2$

donc il n'y a qu'un point $B(2, -3)$ en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

3) Pour que la tangente à C_f en A passe par l'origine, on doit avoir : pour $x = 0$, $y = 0$: $0 = (2a-3).0 - a^2 - 1$

cad $0 = -a^2 - 1$ soit $a^2 + 1 = 0$

Cette équation n'a pas de solution.

Par conséquent, il n'existe pas de point pour lequel la tangente passe par l'origine du repère.

Exercice 4 : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

où $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ $\quad f(1)=\sqrt{4}=2$

f est une fonction dérivable en $x=1$.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \qquad f'(1)=\frac{1}{2}$$

d'où $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = f'(1) = \dfrac{1}{2}$

car on rappelle que :

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ si f est dérivable en x_0.

Exercice 5 :

$$\int_1^2 \frac{3}{\sqrt{t}}\,dt = \left[6\sqrt{t}\right]_1^2 = 6\sqrt{2}-6$$

$$\int_1^2 \frac{x^4+x^2+1}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3}+2-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}+1-1\right) = \frac{7}{3}+1+\frac{1}{2} = \frac{23}{6}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^3}\,dx = \left[\frac{1}{2(1-x)^2}\right]_2^3 = \frac{1}{2.4} - \frac{1}{2.1} = -\frac{3}{8}$$

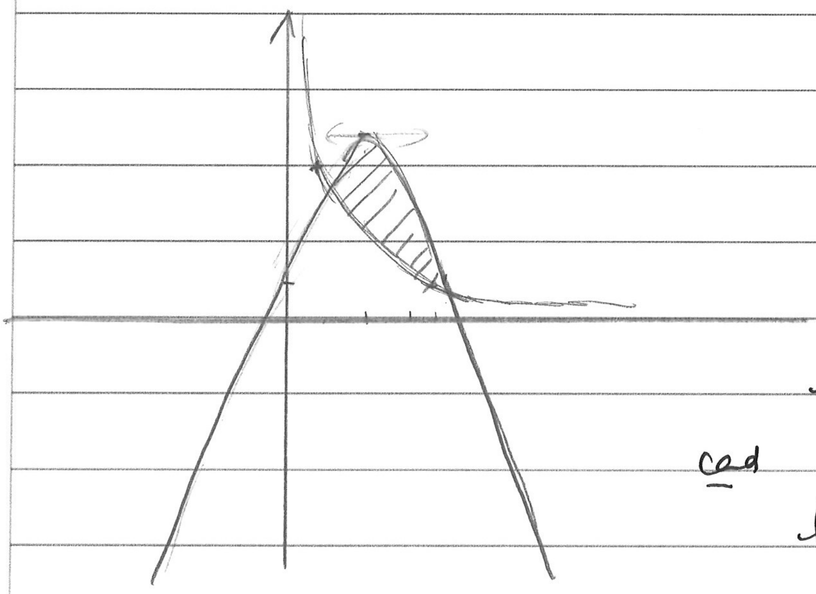
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$$

$$\int_1^2 \frac{1}{t^6}\,dt = \left[\frac{-1}{5t^5}\right]_1^2 = -\frac{1}{5.32}+\frac{1}{5} = \frac{31}{5}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \left[\ln(t^2+1)\right]_{-1}^0 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

<u>Exercice 6</u>: $f(x) = \frac{4}{x}$ — C_f est une hyperbole.

$g(x) = -x^2+4x+1$ — C_g est la parabole tournée vers le bas de sommet $(2;5)$



Pour étudier les positions relatives des courbes de f et de g, on va étudier le signe de :

$$h(x) = \frac{4}{x} - (-x^2+4x+1)$$

cad

$$h(x) = \frac{4}{x} + x^2 - 4x - 1$$

$$h(x) = \frac{x^3-4x^2-x+4}{x} = \frac{(x-1)(x^2-3x-4)}{x}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)(x-4)}{x}$$

		-1		0		1		4	
x	$-$				$+$				$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$+$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$

donc pour $x \in [1,4]$, C_f est au-dessous de C_g.

pour $x=1$, et $x=4$ C_f et C_g ont des intersections.

pour $x \in]-\infty,0[\cup]0,1[$ et $]4,+\infty[$ C_f est au-dessus de C_g.

2) On doit calculer l'aire de la partie hachurée :

$$\int_1^4 -\frac{4}{x} + (-x^2+4x+1)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x - 4\ln x\right]_1^4$$

$$= -\frac{4^3}{3} + 32 + 4 - 4\ln 4 + \frac{1}{3} - 2 - 1 + 0$$

$$= 12 - 8\ln 2.$$