Corrigé : Etudes des Fonctions d'une variable (1)

Exercice 1 :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^4 = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} -3 + \frac{1}{x} = -3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 5 + \frac{1}{x} = 5$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 1 - \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 - 4 + \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 + x - 3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x-4} = 0^-$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-2 + \frac{3}{x}} = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x(-x+1) = -\infty$

$\lim\limits_{t \to -\infty} -3t(t-4) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{-2}{x+3} = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{-2}{x+3} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Exercice 2 :

$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = +\infty$ car $\underset{x \to 2^+}{x - 2 \to 0^+}$, $\underset{x \to 2^+}{x+1 \to 3}$

$x \to 2^+$
$x \to 1^+$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = -\infty$ car $\underset{x \to 2^-}{x - 2 \to 0^-}$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = +\infty$ car $\left(\underset{x \to -1^+}{x+1 \to 0^+}\right.$, $\left(\underset{x \to -1^+}{x-2 \to -3}\right.$

$\left(\begin{matrix} x \to -1 \\ x \to -1^+ \end{matrix}\right.$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = -\infty$.

Exercice 3 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2(2-\frac{1}{x^2})}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x(2-\frac{1}{x^2})} = +\infty$

Exercice 5 : $\lim\limits_{x\to3^+} ax + \dfrac{2}{x-b} = +\infty$ ssi $b=3$

$\lim\limits_{x\to5} ax + \dfrac{2}{x-b} = 5a + \dfrac{2}{5-b} = 5a+1$ car $b=3$

on veut $5a+1 = 11$ donc $a=2$

donc $f(x) = 2x + \dfrac{2}{x-3}$.

Exercice 6 : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-2x+10 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3+5x-2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(-4+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+4}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2(3+4/x^2)}{x^2(1+1/x+1/x^2)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+4/x^2}{1+1/x+1/x^2} = 3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-8x^3+1}{4x+16} = -\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to2} x+1 = 3$

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x+3)}{2(x-1)(x+1/2)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+3}{2(x+1/2)} = \dfrac{4}{3}$

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}^2-9} = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6}$$

Exercice 7 : ① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 1$

Exemple : $f(x) = x+1$ $g(x) = x$

on a bien $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$.

② $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 7$

Exemple : $f(x) = 7x$, $g(x) = x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

et $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{7x}{x} = 7$ pour $x \neq 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 7$.

Exercice 4 :

1) Faux : Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ sur D_f donc $f'(x) > 0$ sur D_f

cad f est croissante sur $[0,+\infty[$ en particulier et $f(x) \geq 0$ sur $[0,+\infty[$

et pourtant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

2) <u>Faux</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) <u>Vrai</u> : Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$, si on prend x assez grand, on a : $-\varepsilon < f(x) - (-1) < \varepsilon$

cad $-\varepsilon + 1 < f(x) < \varepsilon - 1$

en particulier pour $\varepsilon = 0,1$ pour x assez grand, on aura

$-0,1 < f(x) - (-1) < 0,1$

cad $-1 - 0,1 < f(x) < (-1) + 0,1$

cad $-1,1 < f(x) < -0,9$

alors $f(x)$ est négatif pour x assez grand.

<u>Exercice 9</u>

1) pour tout $x > 1$, on a $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$

alors comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x + \infty} \frac{2}{x} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

2) pour tout $x > 1$, on a $\frac{2}{x} \leq f(x) - \frac{3}{2} \leq \frac{3}{x}$

Si on pose $g(x) = f(x) - 3/2$, on a :

pour tout $x > 1$, $\frac{2}{x} \leq g(x) \leq \frac{3}{x}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

d'après le theorème des gendarmes c'est à dire

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \frac{3}{2} = 0$ soit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3/2}$

3) $f(x) \geq 2x-3$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ d'après le théorème de comparaison et car $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x-3 = +\infty$

. $f(x) \geq x^2-3$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ d'après le théorème de comparaison et car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2-3 = +\infty$.

Exercice 10 : Sur $[0, +\infty[$ $f(x) = x - \sqrt{x} + 4$

1) pour tout x de $[0, +\infty[$, $(\sqrt{x}-2)^2 \geq 0$ (carré !)

cad $(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + 4 \geq 0$ (identité remarquable)

Soit $x - 4\sqrt{x} + 4 \geq 0$

ou encore en écrivant $4\sqrt{x} = 3\sqrt{x} + \sqrt{x}$,

$x - \sqrt{x} + 4 \geq 3\sqrt{x}$

cad pour tout réel x de $[0, +\infty[$ $f(x) \geq 3\sqrt{x}$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ d'après le théorème de comparaison et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3\sqrt{x} = +\infty$.

Exercice 8 : . $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x+3)-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = 0$$

. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4x+3} - (x+2) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x+3} - (x+2))(\sqrt{x^2+4x+3} + (x+1))}{\sqrt{x^2+4x+3} + (x+2)}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+3 - (x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+3} + (x+2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)} = 0$$

Exercice 11 : Soit f tq $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$

1) pour x de $[0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})} = \dfrac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

donc $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

2) pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} > \sqrt{x} > 0$

d'où $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} > 0$ ou encore $\dfrac{2}{\sqrt{x}} > \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} > 0$

cad pour x de $]0, +\infty[$, $0 < f(x) < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

3) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, par theorème des gendarmes

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 12 : graphe ① : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

graphe ② : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

graphe ③ : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

1ier cas

Exercice 13 : Le graphe n°1 (de gauche) présente deux asymptotes verticales d'équations : $x = -1$ et $x = 2$. d'où la fonction f_1 est éliminée.

D'autre part, pour des raisons de signe, on comprend que ce graphe est le graphe de f_3 $\left(f_3(0) = \frac{1}{2} \right)$

2ième cas : Le graphe n°2 (de droite) présente une asymptote verticale d'équation $x = -2$, d'où la fonction g_1 est éliminée. Le graphe n°2 a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ quand $+\infty$ et en $-\infty$.

or $\lim_{x \to +\infty} g_3(x) = 0$ $\lim_{x \to -\infty} g_3(x) = 0$

et $\lim_{x \to +\infty} g_2(x) = 1$ $\lim_{x \to -\infty} g_2(x) = 1$.

donc le graphe n°2 est le graphe de la fonction g_2.

Exercice 14 : On note C_f le graphe de f. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{3x - 1}{x} = -\infty$ $\lim_{x \to 0^-} \frac{3x-1}{x} = +\infty$: la droite d'équation $x = 0$ est asymptote au graphe de f.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 1}{x} = 3$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x-1}{x} = 3$: la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$