$\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^-} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à C_f.

$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$ donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{x+2} = -\infty$ donc la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à C_f.

$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2-4} = 0$ donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)(x+2)} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)(x+2)} = -\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à C_f.

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{(x-2)(x+2)} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{(x-2)(x+2)} = +\infty$ donc la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à C_f.

$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x^2-3x+2} = 2$ donc la droite d'équation $y=2$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = -\infty$ la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à C_f.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = +\infty$ la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à C_f.

Exercice 15 : $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$. On note C_f le graphe de f.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x+1) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (2x+1) = 0$

donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à C_f
la droite d'équation $y = 2x+1$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(x) - (2x+1) > 0$ donc C_f est au-dessus de l'asymptote verticale en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 16 : • Étudions $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x)$. On note C_f le graphe de f.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2-1} - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} - x)(\sqrt{x^2-1} + x)}{\sqrt{x^2-1} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$

donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

• $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{\cancel{x}}\right)} = 0$ la droite d'équation $y = 0$ est asymptote en $+\infty$.

$D_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$

donc pas d'asymptote en $x = 1$.