Corrigé : Révisions : Etude des fonctions d'une variable (2)

Exercice 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x+7\sqrt{x}+2}{-3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3+\frac{7\sqrt{x}}{x}+\frac{2}{x}}{-\frac{3}{x}+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3+\frac{7}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} = -3$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-x^3}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} x \frac{\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-7x+12} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-4)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+1)}{x-4} = -4$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}+x = +\infty$$

Exercice 2 : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$

a) $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$, courbe de f.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3}}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{3}}{2x} = 0$$

donc la droite d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2x^2} = \frac{2x^2 - 3}{2\sqrt{3}\, x^2} = \frac{2\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{2\sqrt{3}\, x^2}$

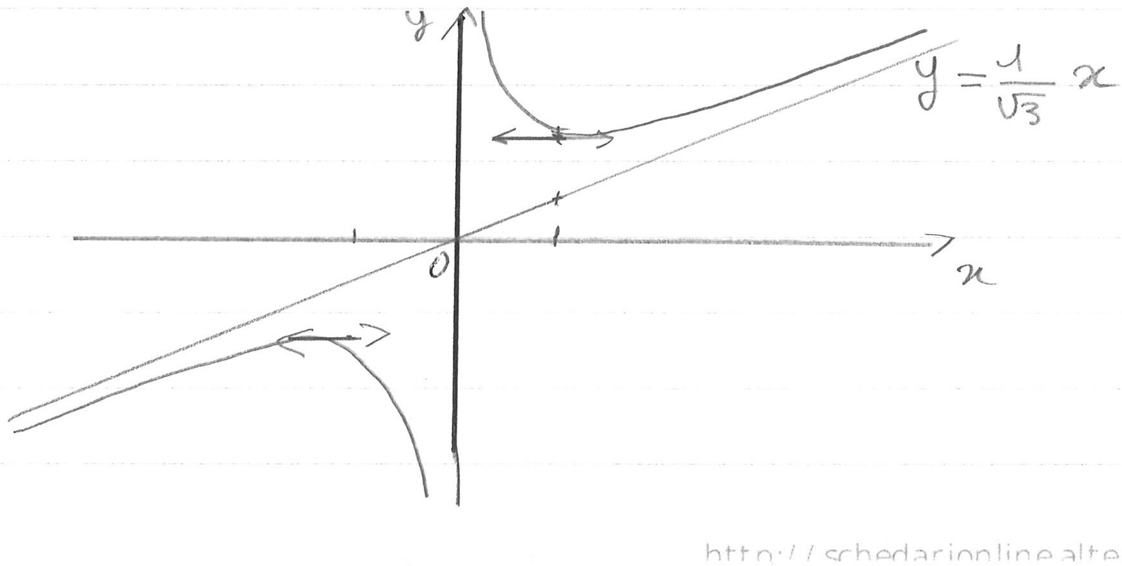
$$f'(x) = \frac{\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{2\sqrt{3}\, x^2}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$f\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = -\sqrt{2}$$

c)



Remarque : pour x de D_f $f(-x) = -f(x)$.

f est <u>impaire</u>. La courbe C_f est symétrique par rapport à O.

2) Point d'intersection entre C et (d) droite d'équation $y = m$.

On étudie le signe de $g(x) = f(x) - m$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x} - m = \frac{2x^2 + 3 - 2m\sqrt{3}\,x}{2\sqrt{3}\,x}$$

$$g(x) = \frac{2x^2 - 2m\sqrt{3}\,x + 3}{2\sqrt{3}\,x}$$

Etudions $2x^2 - 2m\sqrt{3}\,x + 3 = h(x)$:

$$\Delta = 12m^2 - 24 = 12(m^2 - 2)$$

Si $m \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, $h(x)$ garde un signe constant qui est celui de $h(0)$ donc positif.

alors $g(x)$ ne s'annule jamais c.à.d C_f et la droite (d) n'ont pas d'intersection.

Si $m = -\sqrt{2}$ ou $m = \sqrt{2}$, alors $g(x) = \dfrac{2\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{2\sqrt{3}\,x}$ $(m = \sqrt{2})$

ou $g(x) = \dfrac{2\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{2\sqrt{3}\,x}$ $(m = -\sqrt{2})$

pour $m = \sqrt{2}$ $g(x) = 0$ ssi $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$: il y a alors un seul point d'intersection pour $m = \sqrt{2}$ en $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{2}\right)$

pour $m = -\sqrt{2}$ $g(x) = 0$ ssi $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$: il y a alors un seul point d'intersection pour $m = -\sqrt{2}$ en $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{2}\right)$.

Si $m \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ alors $g(x) = 0$ pour deux valeurs de x

en $x_1 = \dfrac{2m\sqrt{3} - \sqrt{12(m^2-2)}}{4}$ $\qquad x_2 = \dfrac{2m\sqrt{3} + \sqrt{12(m^2-2)}}{4}$

$= \dfrac{m\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{m^2-2}}{2}$ $\qquad = \dfrac{m\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{m^2-2}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(m - \sqrt{m^2-2}\right)$ $\qquad = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(m + \sqrt{m^2-2}\right)$

il y a donc 2 points d'intersection entre C_f et la droite d :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(m - \sqrt{m^2-2}\right) ; m\right) \text{ et } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(m + \sqrt{m^2-2}\right) ; m\right)$$

Exercice 3 : $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{x+2}$

1) Recherche des réels a, b, c tq pour $x \neq 2$ $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$

Calculons $f(0)$: on trouve d'une part $-\frac{1}{2}$ et d'autre part $b + \frac{c}{2}$

donc $b + \frac{c}{2} = -\frac{1}{2}$ soit $\boxed{2b + c = -1}$

De même, on calcule $f(1)$: on obtient $\frac{4}{3} = a + b + \frac{c}{3}$

Soit $\boxed{3a + 3b + c = 4}$

et pour $f(-1)$: $\boxed{-a + b + c = -2}$

On a donc le système linéaire $\begin{cases} a-b-c=2 \\ 3a+3b+c=4 \\ 2b+c=-1 \end{cases}$ à résoudre

$\begin{cases} a-b-c=2 \\ 3a+3b+c=4 \\ 2b+c=-1 \end{cases}$ equivaut à $\begin{cases} a-b-c=2 \\ 6b+4c=-2 \\ 2b+c=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} a-b-c=2 \\ c=1 \\ 2b+c=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} a=2 \\ c=1 \\ b=-1 \end{cases}$ donc $f(x) = 2x-1+\dfrac{1}{x+2}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$

donc la droite d'équation $y=2x-1$ est asymptote à C_f en $+\infty$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(2x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$

donc la droite d'équation $y=2x-1$ est asymptote à C_f en $-\infty$.

3) $f'(x) = 2-\dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$		$-2-\frac{1}{\sqrt{2}}$		-2		$-2+\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-5-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

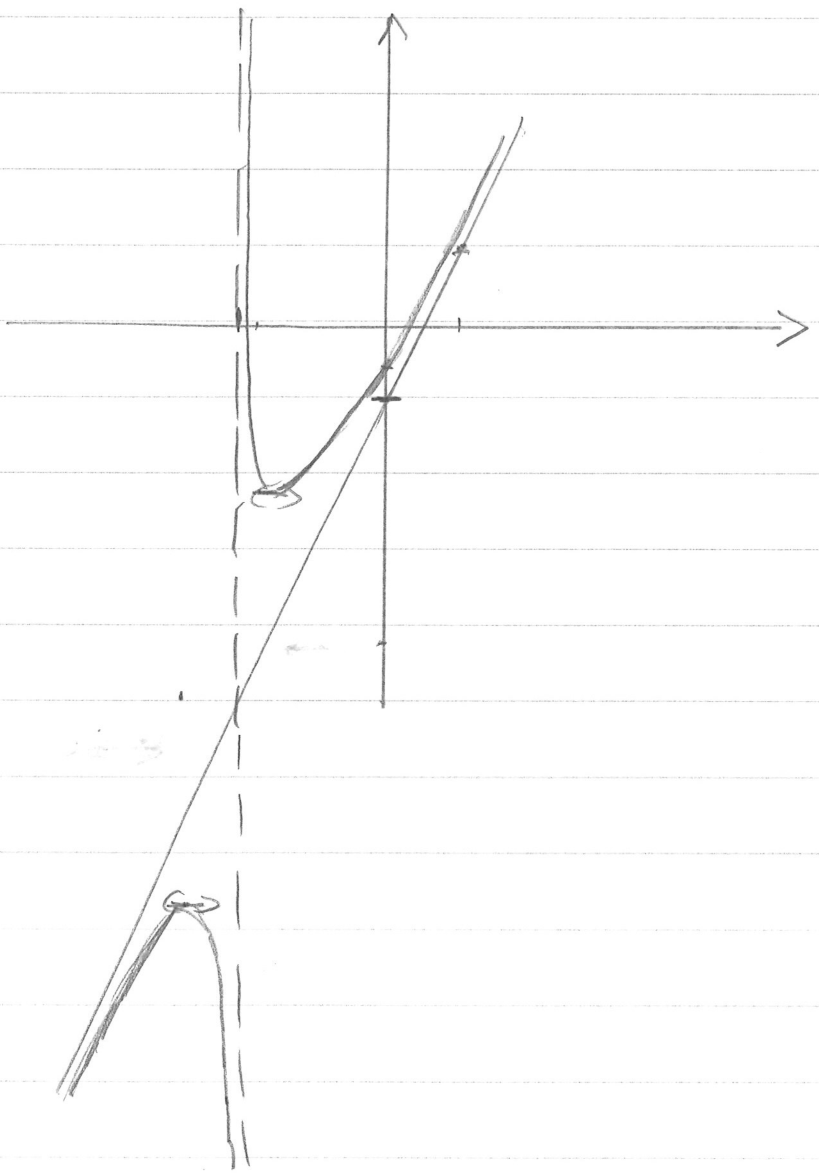
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$ donc la droite $x=-2$ est asymptote verticale à C_f.

$$f\left(-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= -4 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} = -5 + 2\sqrt{2}$$

$$f\left(-2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(-2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 + \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= -4 - \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = -5 - 2\sqrt{2}$$



Exercice 4: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ $\quad D_P =]-\infty, +\infty[$

1) $P'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(2 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$

$P(0) = -1$ $\qquad P(1) = 2 - 3 - 1 = -2$

D'après le tableau de variations complété, on a :

pour x dans $]-\infty, 1]$ $\quad P(x) < 0$

pour x dans $[1, +\infty[$ $\quad P$ est strictement croissante, continue, et changeant de signe donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires généralisé, il existe un unique α de $[1, +\infty[$ tq $P(\alpha) = 0$.

d'autre part, $P(1{,}6) = -0{,}488$

$P(1{,}7) = 0{,}156$

donc $\alpha \in]1{,}6\ , 1{,}7[$.

Exercice 5 : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^3} + 1\right)} = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

donc la droite d'equation $x = -1$ est asymptote verticale à C_f

la droite d'equation $y = 0$ est asymptote en $+\infty$.

2) $f'(x) = \dfrac{-(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \dfrac{-1 - x^3 - 3x^2 + 3x^3}{(1+x^3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2} = \dfrac{P(x)}{(1+x^3)^2}$ où $P(x)$ est la fonction polynômiale de l'exercice 4.

pour $x < \alpha$, $f'(x) < 0$

$x = \alpha$ $f'(\alpha) = 0$

$x > \alpha$ $f'(\alpha) > 0$.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0

3) $f'(0) = -1$ $y = -1 \cdot x + 1 = -x + 1$

$f(0) = 1$

$$h(x) = \frac{1-x}{1+x^3} - (-x+1) = \frac{1-x-(1-x)(1+x^3)}{1+x^3}$$

$$= \frac{1-x-(1+x^3-x-x^4)}{1+x^3} = \frac{x^4-x^3}{1+x^3} = \frac{x^3(x-1)}{1+x^3}$$

pour $x < 1$ et $0 < x < 1$, $h(x) \leq 0$ donc $\mathcal{C}$ au-dessous de la tangente en $(0, \mathcal{C}(0))$

pour $-1 < x \leq 0$, $h(x) > 0$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de la tangente en $(0, \mathcal{C}(0))$.

Exercice 6 : $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 3}$

a) $x^3 - 3x + \alpha = 0$? $\qquad g(x) = x^3 - 3x + 3$

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

sur $]-\infty, -1]$, il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

donc vrai

b)

f est dérivable sur $]\alpha, +\infty[$ vrai car f est défini sur $[\alpha, +\infty[$

c) On cherche le nombre de solutions de l'équation $\sqrt{x^3 - 3x + 3} = m$ selon les valeurs de m, réel positif ou nul.

Comme $m \geq 0$, l'équation $\sqrt{x^3 - 3x + 3} = m$ équivaut à $x^3 - 3x + 3 = m^2$

càd à $\underline{x^3 - 3x + (3 - m^2) = 0}$

posons $g(x) = x^3 - 3x + (3 - m^2)$ $\qquad g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x	α		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$5 - m^2$	$\searrow$	$1 - m^2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{3 - m^2}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{3 - m^2}{x^3}\right) = -\infty .$$

On rappelle que par hypothèse $\boxed{m \geq 0}$

• Si $m \in]\sqrt{5}, +\infty[$ alors $5 - m^2 < 0$ alors $1 - m^2 < 0$
et l'équation a alors une seule solution dans l'intervalle $]1, +\infty[$

• Si $m \in]1, \sqrt{5}[$ alors $5 - m^2 > 0$ et $1 - m^2 < 0$ alors
l'équation a 3 solutions : 1 dans l'intervalle $]\alpha, -1[$, 1 dans l'intervalle $]-1, 1[$ et 1 dans l'intervalle $]1, +\infty[$

Si $m \in [0, 1[$ alors $5 - m^2 > 0$ et $1 - m^2 > 0$ alors
l'équation a 1 solution dans l'intervalle $]\alpha, -1[$

Si $m = \sqrt{5}$ alors $5 - m^2 = 0$ et $1 - m^2 < 0$
alors l'équation a 2 solutions : 1 égale à -1 et 1 dans l'intervalle $]1, +\infty[$

Si $m = 1$ alors $5 - m^2 > 0$ et $1 - m^2 = 0$
alors l'équation a 2 solutions : 1 égale à $x = 1$ et 1 dans l'intervalle $]\alpha, -1[$.