Fonctions continues

Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un réel élément de I.

f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ou $\quad$ f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Continuité sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est continue sur I si et seulement si f est continue en chaque réel a de I

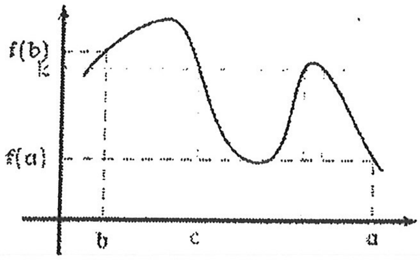
Exemples de fonctions continues

Presque toutes les fonctions de terminale sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition :

- les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition ;
- les fonctions exponentielles sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les fonctions logarithme népérien et logarithme décimal sont continues sur $]0, +\infty[$;
- les fonctions racines n-èmes sont continues sur $[0, +\infty[$;
- les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction tangente est continue sur tout intervalle ne contenant pas un nombre de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$;
- toutes les fonctions obtenues par opérations (somme, produit, quotient) ou composition à partir de ces fonctions de référence sont aussi continues sur leur domaine de définition.

La fonction partie entière fournit un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ et discontinue en certains réels (et donc non continue sur $\mathbb{R}$).

Théorème des valeurs intermédiaires



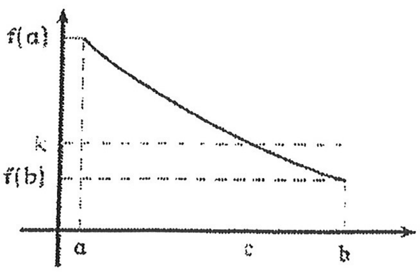
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe au moins un réel c compris entre a et b

tel que $f(c) = k$.

Fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle



Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a, b]$.

Ce théorème se généralise à des intervalles du type $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, ... en remplaçant $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite de f en la borne manquante.

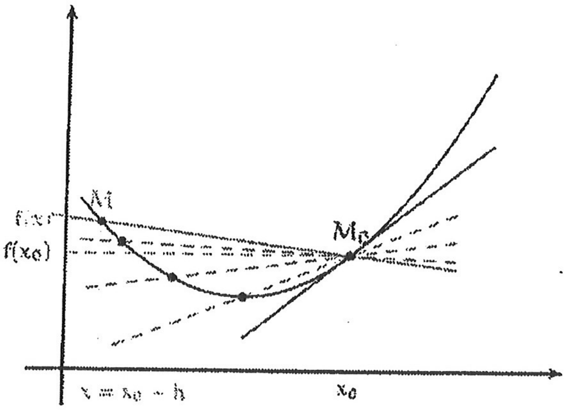
Conséquence.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

Si $f(a)f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans $[a, b]$.

Dérivation

Nombre dérivé. Tangente



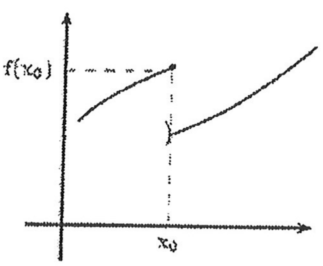
- $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$. Pour $x \neq x_0$, le coefficient directeur de la droite (M_0M) est $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie quand x tend vers x_0. Il revient au même de dire que le taux $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite finie quand h tend vers 0.
- Dans ce cas, le nombre dérivé de f en x_0 est

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

- $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$.
- Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $M_0(x_0, f(x_0))$ est

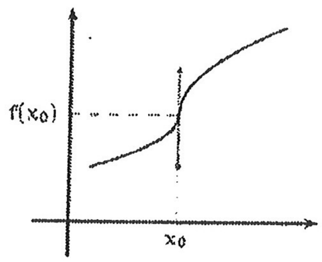
$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).}$$

Trois situations où la fonction f n'est pas dérivable en x_0



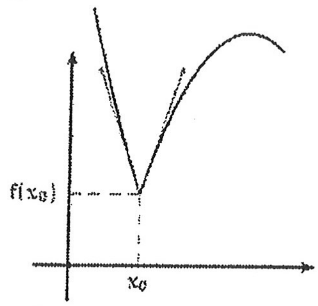
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

f n'est pas continue en x_0.



$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$.

$\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à (Oy).



$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$\mathscr{C}_f$ admet deux demi-tangentes de directions différentes.

Fonctions dérivables sur un intervalle. Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en chaque réel x de I La fonction dérivée de f, notée f', est alors la fonction qui à chaque réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ de la fonction f en x.

Lien avec la continuité

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Si f est continue en a, f n'est pas obligatoirement dérivable en a.

La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0. La fonction racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0. On a ainsi deux exemples de fonctions continues et non dérivables en un point.

On ne peut pas dire « f est dérivable et continue sur I » et encore moins « f est continue et donc dérivable sur I ».

Dérivées et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$), f est croissante sur I (respectivement décroissante sur I).
- Si $f' > 0$ (respectivement $f' < 0$) sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I).

Dérivées et extrema des fonctions

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

- Si $f(x_0)$ est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, f admet un extremum local en x_0.

Formulaire de dérivées

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Dérivées et opérations

- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, $f+g$ est dérivable sur I et $\boxed{(f+g)' = f' + g'}$.
- Si f est dérivable sur I et si λ est un réel, λf est dérivable sur I et $\boxed{(\lambda f)' = \lambda f'}$
- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, $f \times g$ est dérivable sur I et $\boxed{(f \times g)' = f'g + fg'}$.
- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$.
- Si f est dérivable sur I, si g est dérivable sur J et si pour tout x de I, $f(x) \in J$, $g \circ f$ est dérivable sur I et $\boxed{(g \circ f)' = f' \times g' \circ f}$.

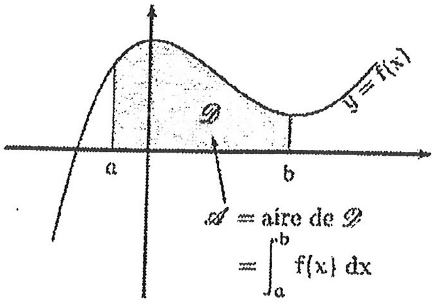
Cette dernière formule fournit en particulier le tableau suivant :

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
f^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$nf'f^{n-1}$	en tout réel où f est dérivable
$1/f$	$-\frac{f'}{f^2}$	en tout réel où f est dérivable et non nulle
$\frac{1}{f^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{nf'}{f^{n+1}}$	en tout réel où f est dérivable et non nulle
f^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	$nf'f^{n-1}$	
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	en tout réel où f est dérivable et strictement positive
e^f	$f'e^f$	en tout réel où f est dérivable
$\ln(f)$	$\frac{f'}{f}$	en tout réel où f est dérivable et strictement positive
$\sin(f)$	$f'\cos(f)$	en tout réel où f est dérivable
$\cos(f)$	$-f'\sin(f)$	en tout réel où f est dérivable

Intégrales

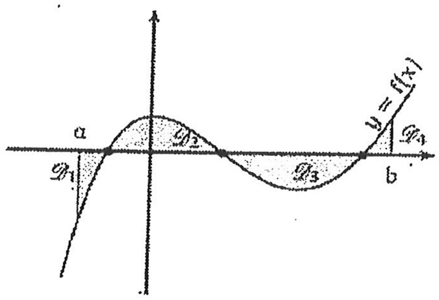
Définition de l'intégrale

Un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant fixé, l'unité d'aire est l'aire du carré OIKJ où I(1,0), K(1,1) et J(0,1) (l'aire du carré OIKJ vaut 1 par définition).



f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$.
$\mathscr{D}$ est le domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.
L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ est l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,dx$ car il est obtenu en sommant les aires des rectangles de longueur $f(x)$ et de largeur infinitésimale dx quand x varie de a à b.



Si f n'est pas de signe constant sur $[a, b]$, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est la différence de la somme des aires des domaines situés au-dessus de (Ox) et de la somme des aires des domaines situés au-dessous de (Ox).

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_3 + \mathscr{A}_4.$$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est $\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.}$

Propriétés de l'intégrale

• Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. Alors $\boxed{\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.}$

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et λ un réel. Alors $\boxed{\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.}$

• Positivité de l'intégrale, croissance de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux réels de I tels que $a \leqslant b$ et si pour tout réel x de $[a, b]$ on a $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Si a et b sont deux réels de I tels que $a \leqslant b$ et si pour tout réel x de $[a, b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

• Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. Si m et M sont deux réels tels que pour tous réels x de $[a, b]$, on ait $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$.

• Relation de Chasles

Convention : On pose $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Calcul d'intégrales. Primitives

Primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale

Théorème fondamental

- Si f est continue sur l'intervalle I, alors f admet des primitives sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I, les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante réelle.
- Si f est continue sur l'intervalle I alors, pour tout réel a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I. Ainsi, pour tout réel x de I,

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Plus précisément,

$$\text{la fonction } x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \text{ est la primitive de } f \text{ sur I qui s'annule en } a.$$

- Si f est continue sur l'intervalle, pour tous réel x_0 de l'intervalle I et tout réel y_0, il existe une primitive F de f sur I et une seule telle que $F(x_0) = y_0$. La primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0 est la fonction

$$x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Expression d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit F une primitive de f sur I. Pour tous réels a et b de I,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).}$$

Notation. Le nombre $F(b) - F(a)$ est noté $[F(x)]_a^b$

Formulaire de primitives

Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitives	Domaine
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
x^n, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
e^x	$e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Primitives et opérations

- Si f et g sont continues sur I et si F et G sont des primitives sur I de f et g respectivement, $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Si f est continue sur I, si F est une primitive de f sur I et si λ est un réel, λF est une primitive de λf sur I.
- Sinon, on a le tableau suivant dans lequel f désigne systématiquement une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est continue sur I :

Fonction	Primitives	Conditions sur f et I
$f'f^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{f^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$	
$\frac{f'}{f^n}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$	$-\frac{1}{(n-1)f^{n-1}} + C$, $C \in \mathbb{R}$	f ne s'annule pas sur I
$f'f^n$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\frac{f^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$	
$\frac{f'}{f}$	$\ln(f) + C$, $C \in \mathbb{R}$	f est strictement positive sur I
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f} + C$, $C \in \mathbb{R}$	
$f'e^f$	$e^f + C$, $C \in \mathbb{R}$	
$f'\cos(f)$	$\sin(f) + C$, $C \in \mathbb{R}$	
$f'\sin(f)$	$-\cos(f) + C$, $C \in \mathbb{R}$	