Révisions : Dérivées et intégrales (2)

1

Calculer les fonctions dérivées des fonctions définies ci-dessous et dérivables . Vous justifierez la dérivabilité de ces fonctions . Pour cela, vous préciserez le domaine de définition de la fonction et de la fonction dérivée et vous décomposerez les opérations que vous utilisez pour dériver cette fonction en l'ordre de ces opérations.

1. $\dfrac{2x+1}{x-2} - \dfrac{1}{x+4}$
2. $\dfrac{x^3+1}{x^2-9}$
3. $x^5 - 2x + \dfrac{3}{x}$
4. $(x^3 - 2x + 1)^3$
5. $\sqrt{1-5x^2}$
6. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$
7. $(4x^3 - 2x + 2)\sqrt{3-x}$
8. $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}$
9. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}$
10. $\sqrt{x^2-1} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
11. $\dfrac{(x-3)^4}{(x+2)^5}$
12. $x\sqrt{1-2x-x^2}$

- $f(x) = \dfrac{(x+1)}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = (x + \dfrac{1}{x})\sqrt{x}$
- $f(x) = (3x-1)^2(1-2x)^3$
- $f(x) = \sqrt{(x+1)} \times (x^2-2)$
- $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+1}{2x-3}$

- $f(x) = (-8x^2 - 2x + 1)^3$
- $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{x-2}$
- $f(x) = \dfrac{(x-3)^4}{(x+2)^6}$

2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer les variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente T à C, la courbe représentative de f, au point d'abscisse 0.
4. Etudier la position relative de C et de T.

3

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - 3x - 1$$

1. Démontrer que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(a; f(a))$ est donnée par $y = (2a-3)x - a^2 - 1$.
2. Existe-t-il un point pour lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
3. Existe-t-il un point pour lequel la tangente passe par l'origine du repère?

4

En utilisant la définition d'un nombre dérivé, déterminer la limite suivante: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

5

Calculer les intégrales suivantes:

$$\int_1^2 \frac{3}{\sqrt{t}}dt, \quad \int_1^2 \frac{x^4+x^2+1}{x^2}dx, \quad \int_2^3 \frac{1}{(1-x)^3}dx, \quad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx, \int_1^2 \frac{1}{t^6}dt, \quad \int_{-1}^0 \frac{2t}{t^2+1}dt$$

6

On considère les fonctions f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{x}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 4x + 1$.

1. Représenter graphiquement les courbes de f et de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé et étudier les positions relatives des courbes.
2. Calculer , en unités d'aire, l'aire de la partie fermée du plan limitée par ces deux courbes.