Révisions : Etude des Fonctions d'une variable (1)

Les études de fonctions sont à faire sans utiliser la calculatrice.

1

Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ 2) $f(x)=-x^4$ 3) $f(x)=-3+\dfrac{1}{x}$

Déterminer la limite éventuelle en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

4) $f(x)=-x^3$ 5) $f(x)=5+\dfrac{1}{x}$ 6) $f(x)=\sqrt{-x}$

Déterminez les limites suivantes

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1-\dfrac{1}{x})$ 8) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x^2-4+\dfrac{1}{x})$ 9) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)$ 10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x-4}$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{-2+\dfrac{3}{x}}$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(-x+1)$ 13) $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(-3t(t-4)\right)$ 14) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\dfrac{1}{x}+3\right)$

Etudier le comportement de f lorsque x tend vers a avec :

15) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $a=2$ 16) $f(x)=\dfrac{-2}{x+3}$, $a=-3$ 17) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $a=0$

2

Déterminer les limites de $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}$ en $x=2$ et $x=-1$.

3

Déterminez les limites suivantes

$f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x}}$ en $+\infty$

4

Vrai ou Faux ?

1) Si une fonction f est strictement croissante et positive sur $[0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) Si une fonction f a pour limite 0 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe

3) Si une fonction f a pour limite -1 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe

5

f est une fonction numérique dont l'expression est $f(x)=ax+\dfrac{2}{x-b}$.

Déterminer a et b sachant que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=11$

6 Déterminez les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-2x+10$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3+5x-2$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+4}{x^2+x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-8x^3+1}{4x+16}$ 5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$ 7) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

7

Trouver deux fonctions f et g telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et telles que :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-g(x)=1$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=7$

8

Déterminez les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)$

9

1) Soit f une fonction telle que pour tout $x>1$, $\dfrac{2}{x^2}\leq f(x)\leq\dfrac{2}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit f une fonction telle que pour tout $x>1$, $\dfrac{2}{x}\leq f(x)-\dfrac{3}{2}\leq\dfrac{3}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Les propriétés suivantes permettent-elles de conclure concernant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?

3) $f(x)\geq 2x-3$ 4) $f(x)\geq x^2-3$

10

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x-\sqrt{x}+4$

1) Montrer que pour tout $x\in[0;+\infty[$ $f(x)\geq 3\sqrt{x}$

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

11

Soit la fonction f définie sur $D = [0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

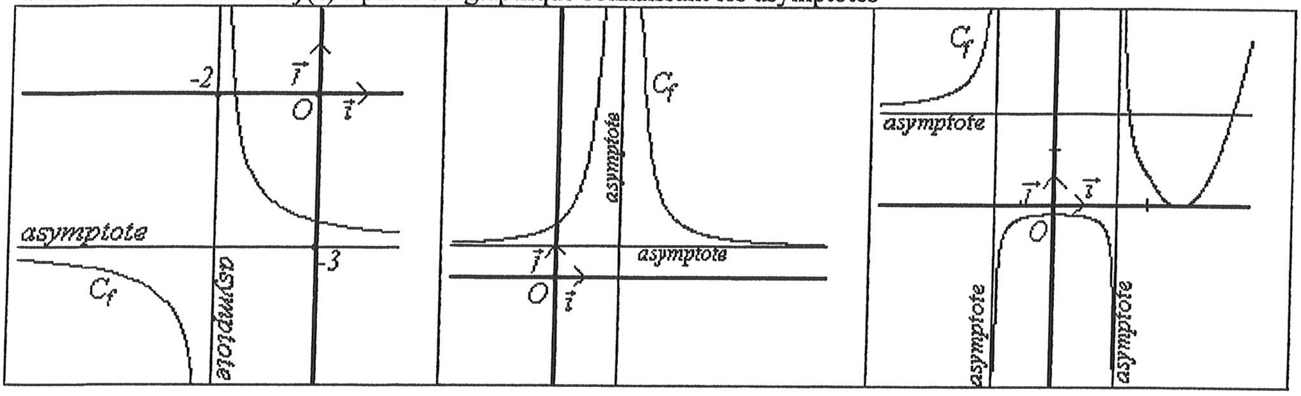
1) Démontrer que, pour tout x de D, on a : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.

2) Démontrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $0 \le f(x) \le \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

3) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

12

Retrouver les limites de $f(x)$ à partir du graphique connaissant les asymptotes

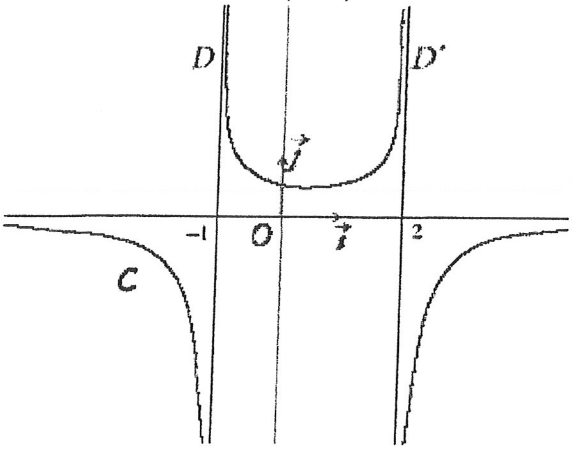


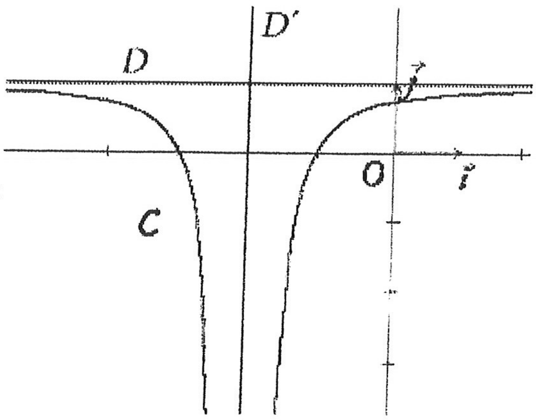
13

Dans chacun des cas ci-dessous, on donne trois fonctions et la représentation graphique C de l'une d'entre elles. Retrouver celle qui est représentée, en justifiant (qu'est-ce qui permet d'éliminer les 2 autres ?)

1^er^ cas $\quad f_1(x) = -\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ ou $f_2(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ ou $f_3(x) = -\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$

2^ème^ cas $\quad g_1(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ ou $g_2(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+2)^2}$ ou $g_3(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$





14

Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x}$ $\quad$ 2) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ $\quad$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ $\quad$ 5) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$

15

Soit f la fonction $f(x)=2x+1+\frac{1}{x^2}$. Etudier le comportement de f en 0, $+\infty$ et $-\infty$, en précisant les asymptotes à la courbe représentative de f et les positions relatives de la courbe et de chaque asymptote.

16

- Montrer que la droite d'équation $y=2x$ est asymptote pour $x \to +\infty$ à la courbe représentative de la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

  Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.