Révisions : Etude des Fonctions d'une variable (2)

Les études de fonctions sont à faire sans utiliser la calculatrice.

1

Calculer en justifiant soigneusement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+7\sqrt{x}+2}{-3+x};\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^3}{1+x^2};\quad \lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-7x+12};\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x};$$

2

1. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a) Montrer que C admet deux asymptotes que l'on précisera.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Tracer la courbe C.

2. Soit m un réel et (d) la droite d'équation $y=m$.

Discuter, suivant les valeurs de m du nombre de points d'intersection de C et (d).

3

Soit f la fonction $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

1) Déterminez trois nombres réels a,b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ pour $x\neq-2$

2) Etudier le comportement de f en $+\infty$ (limite, asymptote sur la courbe).

3) Dresser le tableau de variations de f. 4) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

4

On considère la fonction polynôme P définie pour tout réel x par $P(x)=2x^3-3x^2-1$.

1. Etudier les variations de P.
2. Montrer que l'équation $P(x)=0$ admet une solution réelle unique α appartenant à $]1,6;1,7[$ et en déduire le signe de $P(x)$.

5

Soit $I=]-1;+\infty[$. On considère la fonction f définie sur I par $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (On prendra comme unité 4 cm).

1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de I et en déduire l'existence d'asymptotes éventuelles.
2. Etudier les variations de f et donner le tableau de variations de f.
3. Ecrire une équation de la droite D tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.
   Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite D dans l'intervalle $]-1;1[$.
4. Tracer la courbe C , la droite D et les asymptotes éventuelles.

6

Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 3}$

a) **Proposition 1 :** L'équation $x^3 - 3x + 3 = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

b) **Proposition 2 :** La fonction f est dérivable sur $]\alpha;+\infty[$

c) **Proposition 3 :** Pour tout réel m positif ou nul l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

7

1. soit la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 1200x - 100$.
   (a) Déterminer la limite de g en $+\infty$. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[20, 40]$. Donner une valeur approchée de α à l'unité près.

2. Soit la fonction c définie par $c(x) = \dfrac{50x^3 + 50x^2 + 1200x - 50}{x}$. Etudier la fonction c . Vous commencerez par remarquer que $c(x) = ax + b + h(x)$ où il faudra déterminer les réels a et b et la fonction h.
   Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 20}{x+3}$

1) Quel est l'ensemble de définition D de f ?

2) Déterminez trois réels a, b et c tels que pour tout x de D, on ait : $f(x) = ax^2 + b + \dfrac{c}{x+3}$

3) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-3 \\ x>-3}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-3 \\ x<-3}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax^2 + b))$

4) Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = x^2 - 4$. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire les positions relatives des courbes suivant les valeurs de x.

Dresser le tableau de variations de f

Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

9 On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

a) Montrer que la fonction h est définie sur $[-1\,;0[\cup]0\,;1]$.

b) Montrer que h peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes : $\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ ou $\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

c) Déterminer les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.

10 ; On considère la parabole P représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a est un réel non nul ; la fonction g est définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, et C est sa courbe représentative .

a) Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$ et en $-\infty$ en fonction des valeurs de a .
b) Donner les tableaux de variations de la fonction g dans les six cas suivants en précisant les ensembles de définition de g : 1) $a > 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac > 0$; 2) $a > 0$ et $\Delta = 0$; 3) $a > 0$ et $\Delta < 0$; 4) $a < 0$ et $\Delta > 0$; 5) $a < 0$ et $\Delta = 0$; 6) $a < 0$ et $\Delta < 0$.
c) Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe C .

11

Pour tout réel x non nul, on considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(50+x^{20})^2 - 2500}{x^{20}}$

A l'aide de la calculatrice, remplir le tableau suivant :

x	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01
Valeur approchée de $f(x)$							

1) Peut-on conjecturer la limite de f en zéro ?

2) En développant $(50+x^{20})^2$, simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x \neq 0$. Calculer alors la limite de f en zéro. Surprenant, non ?

12

Dessinez les graphes des fonctions suivantes:

$$x \longmapsto \sqrt{x-2}, \qquad x \longmapsto \sqrt{x}-1, \qquad x \longmapsto -\sqrt[3]{x}$$