L1 MASS : Algèbre Linéaire Cours 13 février 2006

Opérations et matrices élémentaires

Les trois opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice qu'on a vues qui peuvent transformer la matrice en une matrice échelonnée en lignes étaient :

1. permutation de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$ (avec $i \neq j$)
2. multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \leftarrow rL_i$ (avec $r \neq 0$),
3. addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ (avec $i \neq j$).

> Pour chaque opération élémentaire qu'on peut faire sur les lignes d'une matrice A, il existe une matrice carrée E telle que l'opération élémentaire ait le même effet que remplacer A par le produit EA.

Les matrices E qui correspondent aux opérations élémentaires dans cette façon s'appellent des **matrices élémentaires**. Si A est de taille $m \times n$, alors E doit être de taille $m \times m$ pour que le produit EA reste de taille $m \times n$. Pour permuter les deux premières lignes d'une matrice à trois lignes, on fait le produit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Pour multiplier la deuxième ligne par 3, ou pour additionner 5 fois la première ligne à la deuxième, on fait les produits :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 3b_1 & 3b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + 5a_1 & b_2 + 5a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

Les matrices $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sont donc des matrices élémentaires.

Selon le principe entouré ci-dessus, appliquer une opération élémentaire à la matrice identité I a l'effet de remplacer I par $EI = E$. Donc on peut résumer :

> - Pour les opérations élémentaires sur les matrices à m lignes, les matrices élémentaires E sont carrées de taille $m \times m$.
> - La matrice élémentaire E correspondant à une opération élémentaire est obtenue en appliquant l'opération élémentaire à la matrice identité I.
> - L'opération élémentaire sur les lignes d'une matrice A a le même effet que multiplier A à gauche par E (c'est-à-dire, que remplacer A par EA).

Si on enchaîne plusieurs opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice A, et les matrices élémentaires correspondant sont disons E_1, E_2, E_3, E_4, cela correspond aux remplacements successifs de A selon :

$$A \leftarrow E_1A \leftarrow E_2E_1A \leftarrow E_3E_2E_1A \leftarrow E_4E_3E_2E_1A.$$

La première opération élémentaire qu'on applique correspond à la matrice E_1 qui est la plus proche de A, donc la plus à droite dans le produit. La deuxième opération élémentaire correspond la matrice qui est la deuxième de la droite, et ainsi de suite. En résumé :

- Appliquer une suite d'opérations élémentaires à une matrice A correspond à multiplier A à gauche par un produit de matrices élémentaires $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1$. L'ordre des matrices élémentaires dans ce produit est l'inverse de l'ordre de l'application des opérations élémentaires.

Matrices inversibles

Définition. Une matrice A est dite **inversible** s'il existe une matrice B avec $AB = I$ et $BA = I$. La matrice B est dite l'**inverse** de A et se note $B = A^{-1}$.

Comme exemples, pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie cela en calculant $AA^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = I_2$, et $A^{-1}A = I_2$, et similairement pour C et C^{-1}.

Il existe aussi des matrices non inversibles. Par exemple, un matrice nulle $\mathbf{0}$ n'est jamais inversible, parce que son produit avec n'importe quelle matrice est toujours nulle ($\mathbf{0}\,B = \mathbf{0}$ et $B\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$) et jamais l'identité. Un autre exemple, la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ne peut être inversible, car pour tout produit MB qu'on peut faire, les deux lignes de MB seront égales, donc $MB \neq I_2$.

On a déjà vu que les opérations élémentaires sont inversibles, parce que chaque opération élémentaire se défait par une autre opération élémentaire du même type. Comme conséquence :

Proposition 1. *Les matrices élémentaires sont inversibles.*

Par exemple, l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ est invertie par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$. L'opération $L_1 \leftarrow 3L_1$ est invertie par l'opération $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$. Les matrices élémentaires correspondant sont inverses :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'opération d'échange $L_1 \leftrightarrow L_2$ est auto-inverse. Cela donne

$$E_3 = E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelques propriétés des inverses qui sont simples à voir :

Théorème 2. *L'inverse A^{-1} d'une matrice inversible A est unique.*

Théorème 3. *L'inverse A^{-1} d'une matrice inversible A est inversible, et $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Théorème 4. *Si A et B sont des matrices inversibles, et leur produit existe, alors AB est inversible, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Théorème 5. *La transposée A^T d'une matrice inversible A est inversible, et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Preuves. Pour montrer le Théorème 2, on suppose que A a deux inverses B et C. Ils vérifient $BA = I$ et $AC = I$. Mais alors on a

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Donc ces deux inverses de A sont le même, et A n'a qu'un inverse.

Pour le Théorème 3, quand A est inversible, A et A^{-1} vérifient $AA^{-1} = I$ et $A^{-1}A = I$. Selon la définition d'un inverse, cela suffit pour que A soit l'inverse de A^{-1}.

Pour le Théorème 4, on a

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

et un calcul similaire donne $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. Donc $B^{-1}A^{-1}$ est l'inverse de AB.

Pour le Théorème 5, on rappelle qu'on a $(CD)^T = D^TC^T$. Donc si on applique l'opération de transposition aux équations $AA^{-1} = I$ et $A^{-1}A = I$, on trouve $(A^{-1})^TA^T = I^T = I$, et $A^T(A^{-1})^T = I^T = I$. Donc l'inverse de A^T est $(A^{-1})^T$. □

Matrices inversibles : critère du rang

Les matrices inversibles sont caractérisées par le critère nécessaire et suffisant suivant :

Théorème 6. *Une matrice A est inversible si et seulement si A est carrée et on a*

$$\operatorname{rg} A = \textit{nombre de lignes de } A = \textit{nombre de colonnes de } A.$$

Donc une matrice A de taille 2×2 est inversible ssi $\operatorname{rg} A = 2$. Une matrice B de taille 3×3 est inversible ssi $\operatorname{rg} B = 3$, et ainsi de suite. Et aucune matrice non carrée n'est inversible.

Le théorème est une conséquence de trois observations.

1) Si on transforme une matrice A en une matrice U par une suite d'opérations élémentaires, alors A est inversible si et seulement si U l'est.

2) Si A est carrée de taille $n \times n$, et $\operatorname{rg} A = n$, alors A peut se transformer en la matrice identité I par une suite d'opérations élémentaires. Donc A est inversible par l'observation 1.

3) Sinon, A ou A^T peut se transformer par des opérations élémentaires en une matrice avec une ligne de 0. Une telle matrice n'est pas inversible (exercice). Donc A n'est pas inversible.

L'observation 1 est une conséquence des matrices élémentaires. Si on transforme A en U par des opérations élémentaires sur les lignes, il existe un produit de matrices élémentaires $F = E_sE_{s-1}\cdots E_2E_1$ tel que $U = FA$. Les matrices élémentaires sont inversibles (Proposition 1) ainsi que leur produit (Théorème 4). Donc si A est inversible, le produit $FA = U$ le sera aussi, et si U est inversible, le produit $F^{-1}U = F^{-1}FA = IA = A$ le sera aussi (Théorèmes 4 et 3).

L'algorithme pour A^{-1} : méthode des pivots

L'algorithme détecte si une matrice carrée A est inversible ou non, et quand A est inversible, il calcule A^{-1}.

On travaille sur une matrice particulière $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

Première étape. On juxtapose A et la matrice identité I pour former une matrice 3×6 (ou en général $n \times 2n$) :

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On applique des opérations élémentaires et des pivotages **vers le bas** pour mettre cette matrice en forme échelonnée. Dans ce cas particulier on pivote deux fois pour trouver

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

A la fin de cette étape, A devient échelonnée, et on peut détecter si A était de rang 3 (ou n) et donc inversible ou non. C'est-à-dire, si on fait apparaître une ligne qui est nulle à gauche du bar, alors A n'est pas inversible et on arrête. Mais dans l'exemple, A est inversible et on continue.

Deuxième étape. On applique des opérations élémentaires et pivotages **vers le haut** pour transformer la moitié gauche en la matrice identité I. On fait ces pivotages **en commençant à droite et en bas**, parce qu'on peut montrer que c'est le plus rapide.

Dans notre exemple, faisons d'abord $L_3 \leftarrow -L_3$, pour simplifier les pivots.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Puis on pivote vers le haut autour du pivot de la troisième ligne par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Finalement on pivoite vers le haut autour du pivot de la deuxième ligne en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

A la fin la matrice est $(I \mid A^{-1})$. Donc on trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pourquoi marche-t-il ? Les opérations élémentaires successives ont le même effet que la multiplication à gauche par une suite de matrices élémentaires. Donc l'algorithme fait une suite de transformations

$$(A \mid I) \leftarrow (E_1 A \mid E_1) \leftarrow (E_2 E_1 A \mid E_2 E_1) \leftarrow \cdots \leftarrow (FA \mid F) = (I \mid F)$$

avec E_1, E_2, etc., des matrices élémentaires, et F un produit de matrices élémentaires. A la fin, on réduit la matrice à gauche à l'identité I, donc on a $FA = I$. Par conséquence on a $F = A^{-1}$, et la matrice finale est bien $(I \mid A^{-1})$.

Un autre exemple : Pour inverser $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ on fait

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \leftarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right) \leftarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right).$$

On trouve $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.